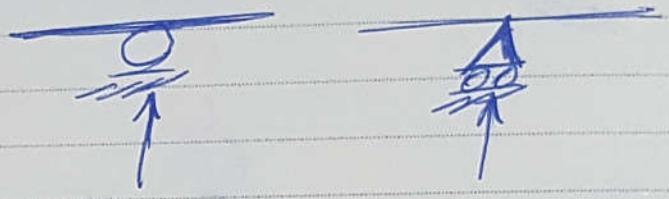
فصل ۱:

این فصل به تعیین نیروهای داخلی و مفاهیم تنش داخلی در اجسام می‌پردازد.

انواع تکیه‌گاه‌ها:

۱) تکیه‌گاه غلتکی:



در دیاگرام آزاد، تنها یک نیروی مجهول خواهد داشت.

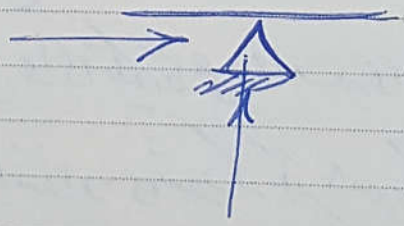
۲۶

سه‌شنبه / 16,Tue.

مرداد / August , 2016

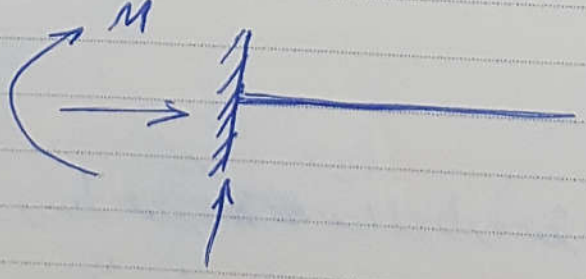
۱۳ ذی‌القعده ۱۴۳۷

۲) تکیه‌گاه مفصلی:



در دیاگرام آزاد، دو نیروی مجهول خواهد داشت

۳) تکیه‌گاه گیردار:

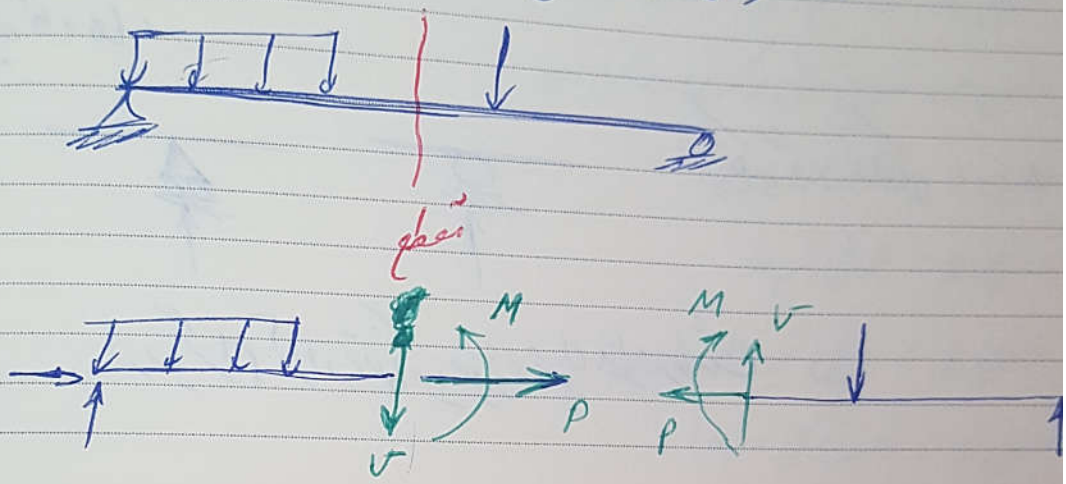


در دیاگرام آزاد، سه نیروی مجهول دارد.

۲۵

چهارشنبه / 17,Wed.
مرداد / August , 2016
۱۴ ذی‌القعده ۱۴۳۷

در حالت کلی، در هر مقطع عضو، یک نیروی افقی و یک نیروی قائم استاتیکی وجود دارد که هر قسمت بریده شده را در تعادل نگه دارد. نیروی قائم را نیروی برشی، نیروی افقی را نیروی محوری و لنگر خنثی را لنگر خمشی در آن مقطع می گویند.



۲۶

پنجشنبه / 18,Thu.
مرداد / August , 2016
۱۵ ذی‌القعده ۱۴۳۷

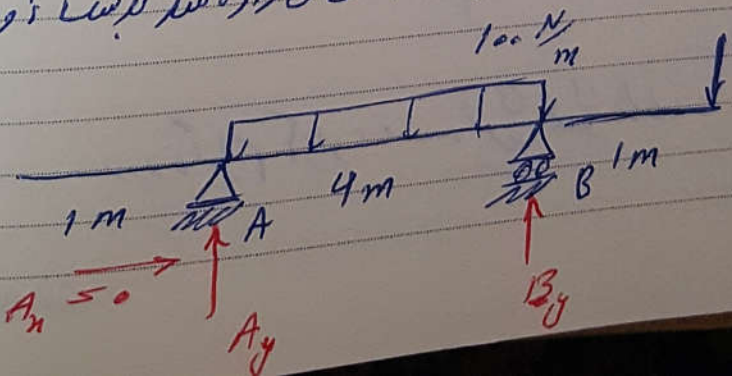
برای تعیین این نیروها، روش مقطع زدن به کار می رود. تحلیل هر عضو یا سیستم خود را به دیاگرام آزاد آن تبدیل می شود. نیروها و گشتاورهای ناشناخته محاسبه می شوند. برای محاسبه نیروهای داخلی در هر مقطع از این اصل استفاده می شود که اگر جسمی کلاً در حال تعادل باشد، هر قسمت از آن نیز باید در حال تعادل باشد.

کودتای آمریکا برای بازگرداندن شاه (۱۳۳۲ هـ.ش)

۲۷

جمعه / 19,Fri.
مرداد / August , 2016
۱۶ ذی‌القعده ۱۴۳۷

مثال) نیروهای داخلی را در وسط تیر نشان داده شده بدست آورید:



۳۰ شنبه / 20,Sat.
مرداد / August , 2016
۱۷ ذی‌القعده ۱۴۳۷

حل ۱: ابتدا عکس العمل های تکیه گاهی:

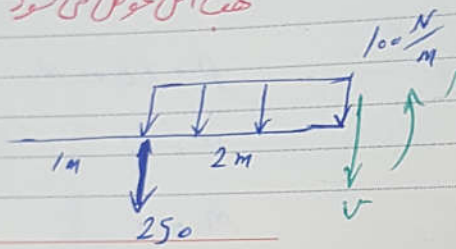
$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \times 4 = 100 \times 4 \times 2 + 1800 \times 5$$

$$B_y = 2450\ N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 2450 = 100 \times 4 + 1800 \rightarrow$$

$$A_y = -250\ N$$

جهت آن عوض می شود



مقطع می زنیم:

روز بزرگداشت علامه مجلسی

۳۱ یکشنبه / 21,Sun.
مرداد / August , 2016
۱۸ ذی‌القعده ۱۴۳۷

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 100 \times 2 + 250 + V = 0 \rightarrow V = -450\ N$$

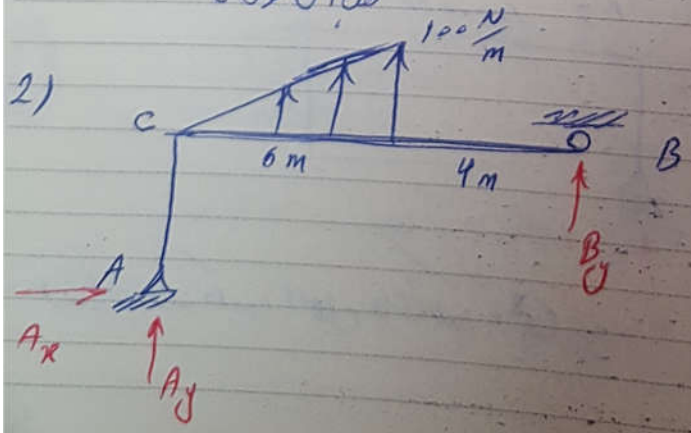
جهت آن عوض می شود

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M + 100 \times 2 \times 1 + 250 \times 2 = 0 \rightarrow$$

$$M = -700\ N \cdot m$$

جهت آن عوض می شود

2)



مثال) نیروهای داخلی را در نقطه C بیابید.

روز جهانی مسجد

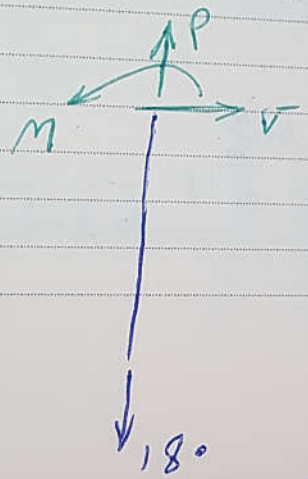
22,Mon. / دوشنبه
August , 2016 / شهریور
۱۹ ذی‌القعده ۱۴۳۷

ابتدا با استفاده از عکس العمل های تکیه گاهی:

$$B_y \times 10 + 100 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 4 = 0 \rightarrow B_y = -120\,N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 100 \times 6 \times \frac{1}{2} - 120 + A_y = 0 \qquad \sum M_A = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0 \qquad A_y = -180\,N$$



مقطع را رسم:

$P = 180\,N$

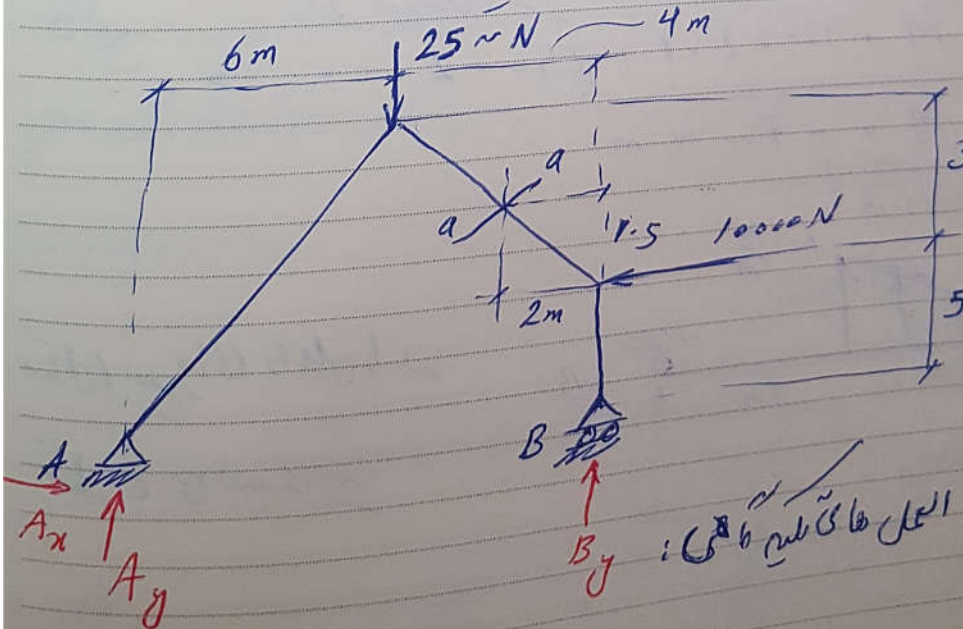
$V = 0$

$M = 0$

روز بزرگداشت ابوعلی سینا - روز پزشک

23,Tue. / سه شنبه
August , 2016 / شهریور
۲۰ ذی‌القعده ۱۴۳۷

مثال) نیروهای داخلی را در مقطع a-a بدست آورید:



ابتدا با استفاده از عکس العمل های تکیه گاهی:

اغاز هفته دولت ـ شهادت سید علی اندرزگو (۱۹ رمضان ۱۳۵۷ هـ ش)

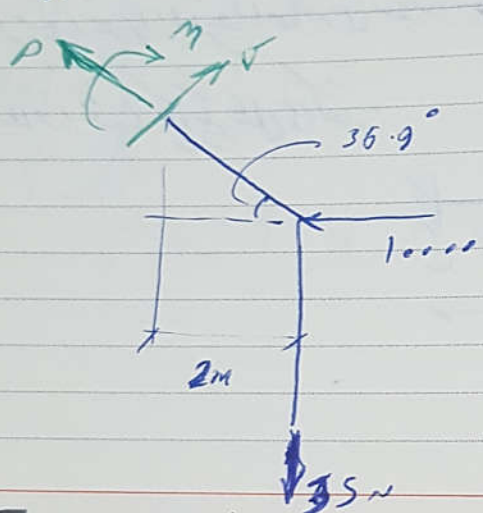
۳ چهارشنبه / 24,Wed.
شهریور / August , 2016
۲۱ ذی‌القعده ۱۴۳۷

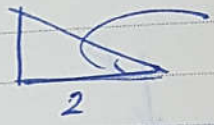
$\sum M_A = 0$

$B_y \times 10 + 10000 \times 5 - 2500 \times 6 = 0 \rightarrow B_y = -3500$

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 3500 = 2500 \rightarrow A_y = +6000\ N$

$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 10000\ N$





$\theta = \tan^{-1}\frac{1.5}{2} = 36.9$

$\sum M_{a-a} = 0 \rightarrow$

$-3500 \times 2 - 10000 \times 1.5 - M = 0$

$\rightarrow M = 22000\ kN$

۴ پنجشنبه / 25,Thu.
شهریور / August , 2016
۲۲ ذی‌القعده ۱۴۳۷

$\sum F_y = 0 \rightarrow V\cos 36.9 + P\sin 36.9 - 3500 = 0$

$\times 0.6 \quad 0.8V + 0.6P = +3500$

$\sum F_x = 0 \rightarrow -10000 + V\sin 36.9 - P\cos 36.9 = 0$

$\times -0.8 \quad 0.6V - 0.8P = 10000$

۵ جمعه / 26,Fri.
شهریور / August , 2016
۲۳ ذی‌القعده ۱۴۳۷

روز کارمند

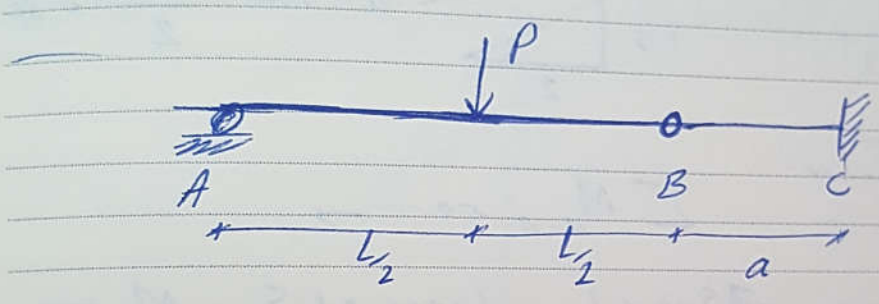
$P = -5900\ N$

$0.6V - 0.8 \times (-5900) = 10000 \rightarrow$

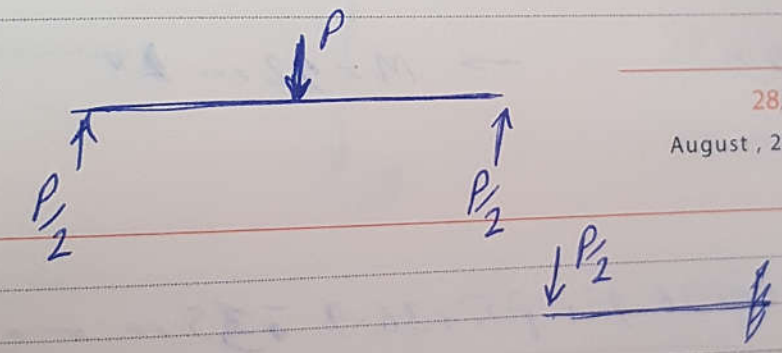
$V = 8800\ N$

شنبه / 27,Sat.
شهریور / August , 2016
۲۴ ذی‌القعده ۱۴۳۷

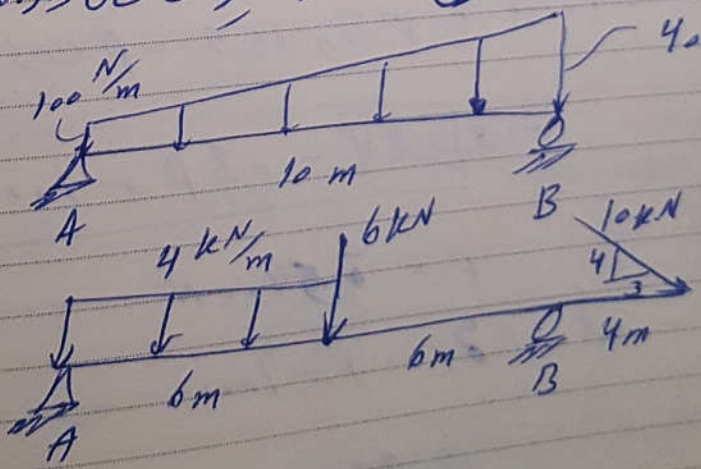
مفصل داخلی : یک مفصل فقط توانایی انتقال نیروی محوری و نیروی برشی را دارد. مفصل می‌توان هیچ گونه لنگری را انتقال دهد. بنابراین یک مفصل داخلی نقطه‌ای مناسبی برای انفصال سازه به دو قسمت جدا برای محاسبه واکنش های باشد. با وجود مفصل داخلی یک شرط جدید برای نوشتن تعادل لنگرها اضافه می‌شود. واکنش های مفصل داخلی هر دو قسمت جدا از یکدیگر خلاف جهت یکدیگر عمل می‌کنند.



یکشنبه / 28,Sun.
شهریور / August , 2016
۲۵ ذی‌القعده ۱۴۳۷



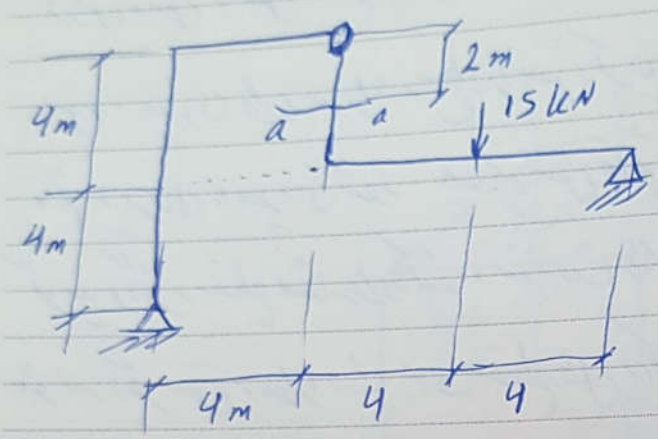
مثال) نیروهای داخلی را با استفاده از مقطع زدن در وسط تیرهای نشان داده شده، بدست آورید:



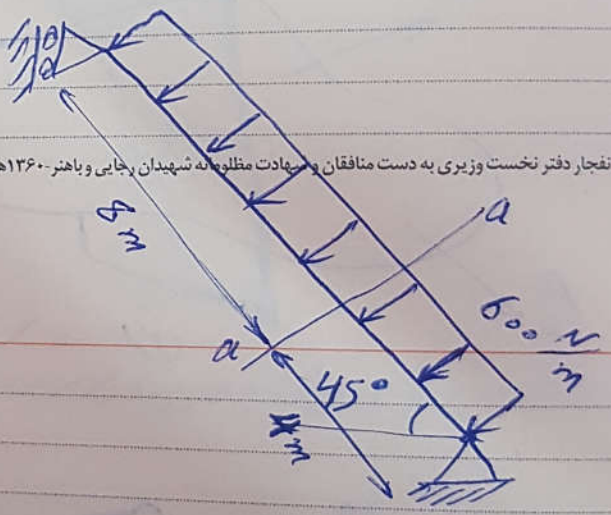
۸ دوشنبه / 29,Mon.
شهریور / August , 2016
۲۶ ذی‌القعده ۱۴۳۷

نیروهای محوری را در مقاطع مشخص شده، بدست آورید:

۱)



۲)



مبارزه با تروریسم (انفجار دفتر نخست وزیری به دست منافقان و شهادت مظلومانه شهیدان رجایی و باهنر - ۱۳۶۰هـ.ش)

۹ سه شنبه / 30,Tue.
شهریور / August , 2016
۲۷ ذی‌القعده ۱۴۳۷

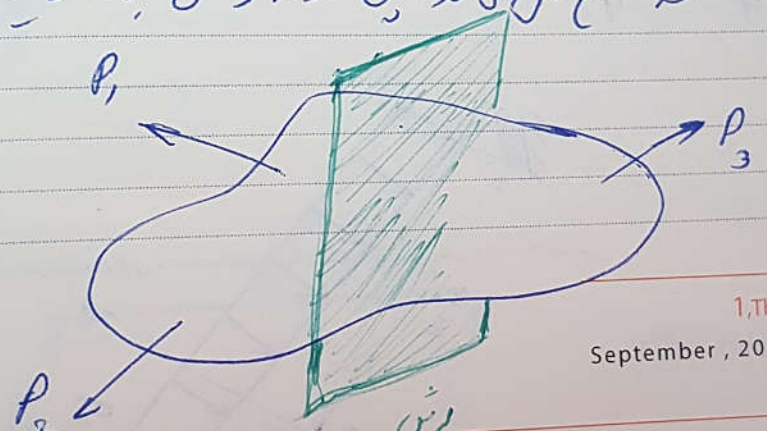
چهارشنبه / 31,Wed.
شهریه / August , 2016
۲۸ ذی‌القعده ۱۴۳۷

فصل ۲:

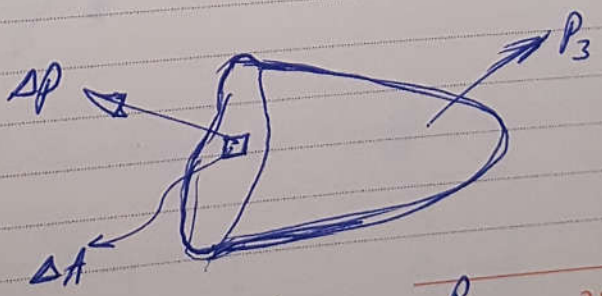
در این فصل، تنش، کرنش و مفاهیم مربوط به تنش و کرنش توضیح داده می‌شود.

تنش: نیروی وارد بر واحد سطح را تنش گویند. چنانچه این نیرو، عمود بر مقطع باشد، تنش قائم یا نرمال نامیده می‌شود. چنانچه تنش قائم باعث ایجاد کشش در مقطع شود به آن تنش کششی گویند و اگر به مقطع فشار وارد کند، تنش فشاری است. تنش نرمال را با σ نشان می‌دهند.

مؤلفه دیگر تنش، موازات صفحه مقطع عمل می‌کند. این مؤلفه را تنش برشی گویند و با حرف τ نشان می‌دهند.



پنجشنبه / 1,Thu.
شهریه / September , 2016
۲۹ ذی‌القعده ۱۴۳۷



جمعه / 2,Fri.
شهریه / September , 2016
۳۰ ذی‌القعده ۱۴۳۷

تنش متوسط $= \frac{P}{A}$

تنش در یک نقطه $= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$

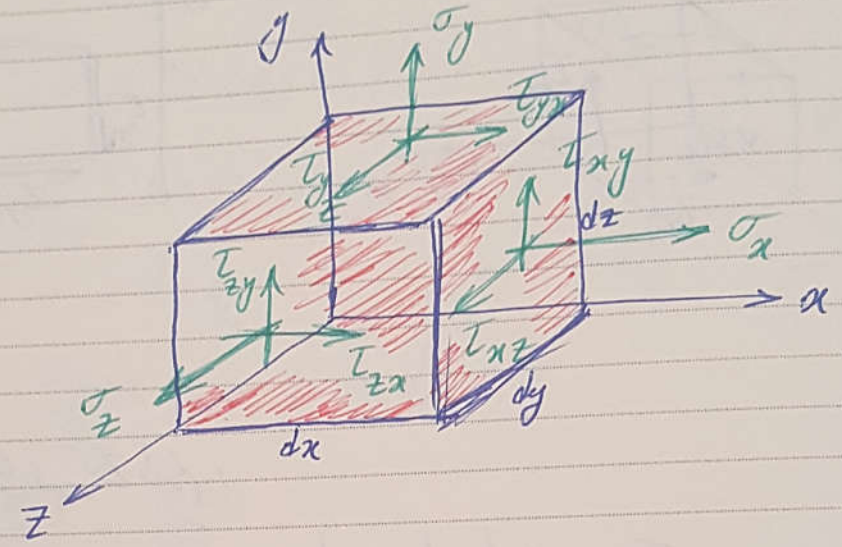
واحد تنش $\frac{N}{m^2}$ یا Pa می‌باشد. آحاد $\frac{N}{mm^2}$ یا MPa نیز نشان می‌دهند.

همچنین در سیستم M.K.S آحاد $\frac{kg}{cm^2}$ نشان می‌دهند.

$1\ MPa = 10\ \frac{kg}{cm^2}$

۱۳ شنبه / 3,Sat.
شهریور / September , 2016
۱ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

تانسور تنش: اگر ذره‌ای با ابعاد کوچک را از جسم جدا کنیم، تمام تنش‌هایی که بر روی آن عمل می‌کند به صورت زیر می‌شود.



سالروز ازدواج حضرت علی(ع) و حضرت فاطمه(س) (۲ هـ.ق) - روز ازدواج - روز تعاون - روز بزرگداشت ابوریحان بیرونی

۱۴ یکشنبه / 4,Sun.
شهریور / September , 2016
۲ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

مؤلفه‌های تنش را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$\text{تانسور تنش} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

اسکالر ، بردار (نیرو) ، تانسور تنش

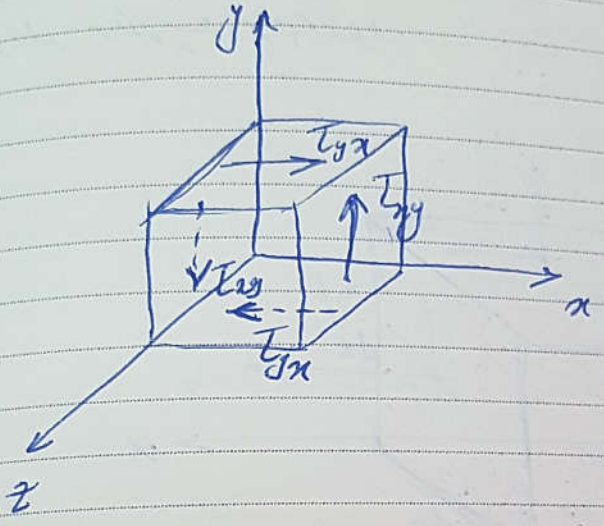
↓ ↓ ↓

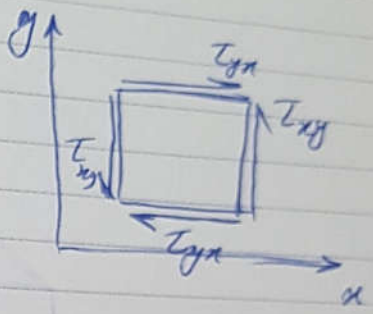
تانسور از مرتبه ۰ ، تانسور از مرتبه ۱ ، تانسور از مرتبه ۲

تنش را نمی‌توان توسط یک مجموعه سه مؤلفه‌ای متعامد مرتبط نشان داد زیرا علاوه بر مقدار و امتداد، به سطح واحدی که بر روی آن تأثیر می‌کند نیز مربوط است.

شهادت ایت‌ا... قدوسی و سرتیپ وحید دستجردی (۱۳۶۰ هـ.ش)

تانسور تنش متقارن است، یعنی $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.



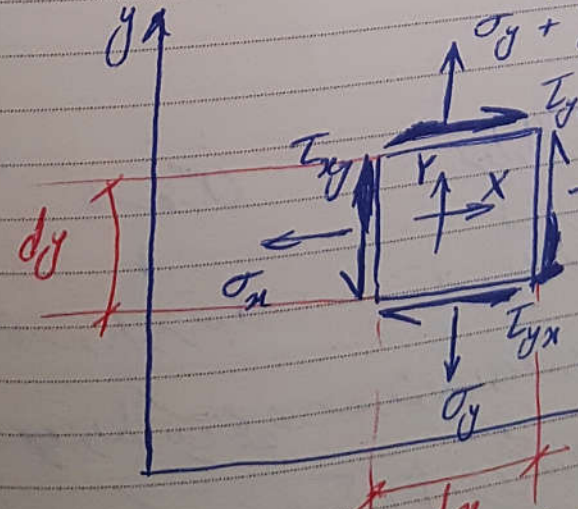


با لنگری حول محور z داریم:

$$\sum M = 0 \rightarrow \tau_{xy}\,(dy\,dz)\,dx - \tau_{yx}\,(dx\,dz)\,dy = 0$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

معادلات تعادل: در حالت دوبعدی، سیستم تنش ها را روی یک سیار کوچک به فرض ضخامت واحد (چون دوبعدی است) $(dx)(dy)(1)$ با جهت مثبت نشان می‌دهیم.



معادله تعادل را در راستای x می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)(dy \times 1) - \sigma_x (dy \times 1)$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right)(dx \times 1) - \tau_{yx}(dx \times 1)$$

$$+ X(dx\,dy \times 1) = 0 \rightarrow$$

$$\sigma_x\,dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\,dy - \sigma_x\,dy + \tau_{yx}\,dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\,dx$$

$$- \tau_{yx}\,dx + X\,dx\,dy = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

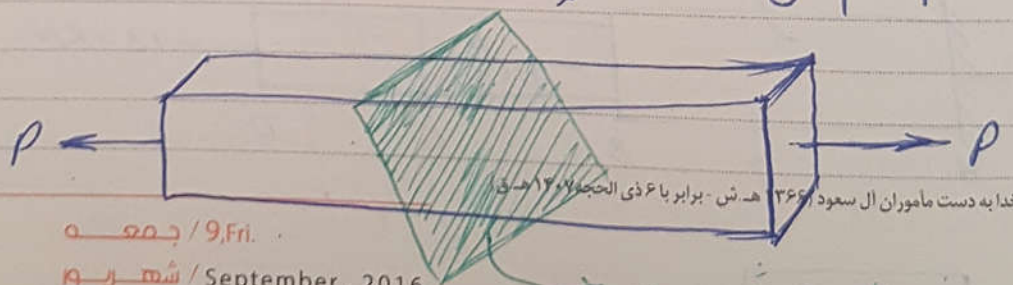
$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\right) dx\,dy = 0$$

معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases}$$

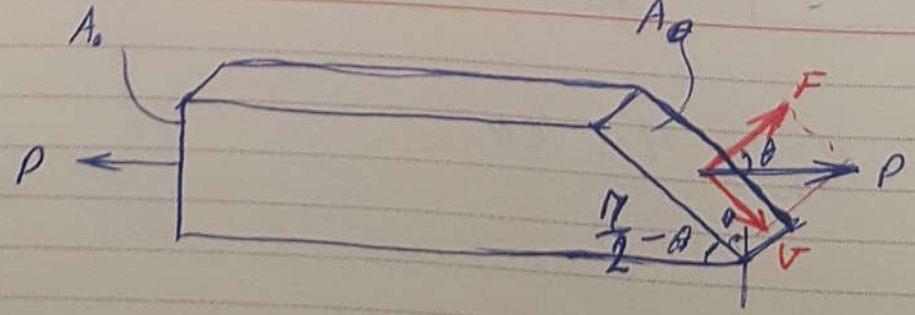
قیام ۱۷ شهریور و کشتار جمعی از مردم به دست مأموران ستم شاهی پهلوی (۱۳۵۷ هـ.ش)

تنش در مقاطع مایل: نیروی محوری در روی مقاطعی که بر محور عضو دو نیروی عمودی باشند، هم تنش‌های قائم و هم تنش‌های برشی تولید می‌کنند.



شهادت مظلومانه زائران خانه خدا به دست مأموران ال سعود (۱۳۶۶ هـ.ش - برابر با ۶ ذی الحجه ۱۴۰۷ هـ.ق)

صفحه با اورب θ برش می دهد.



شهادت حضرت امام محمد باقر (ع) (۱۱۴ هـ.ق) - وفات آیت ا... سید محمود طالقانی اولین امام جمعه تهران (۱۳۵۸ هـ.ش)

۲۰

$F = P\cos\theta \quad , \quad V = P\sin\theta$

تنش قائم : $\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$

تنش برشی : $\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta$

$\theta = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0}$

$\theta = 90 \Rightarrow \sigma = 0$

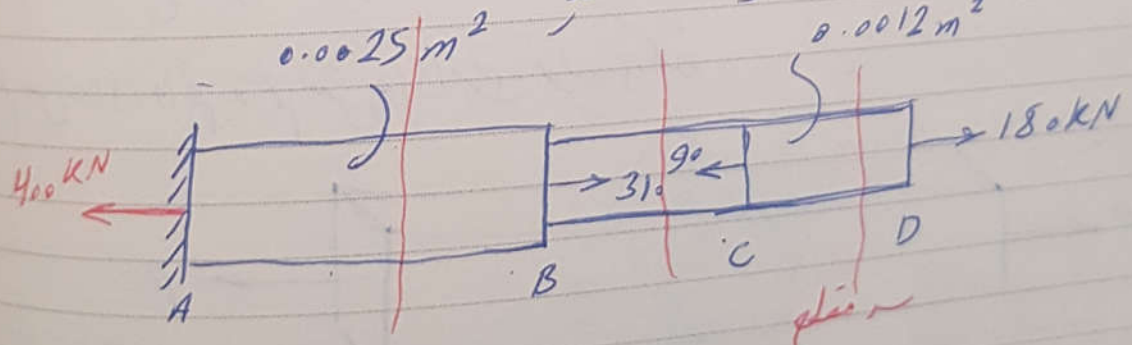
$\theta = 0, 90 \Rightarrow \tau = 0$

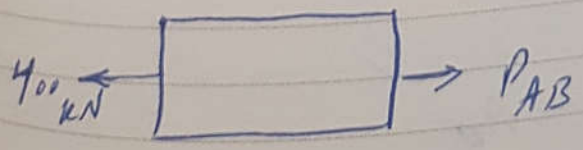
$\theta = 45 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2A_0}$

شهادت دومین شهید محراب آیت ا... مدنی به دست منافقان ۱۳۶۰ ه.ش

۲۱

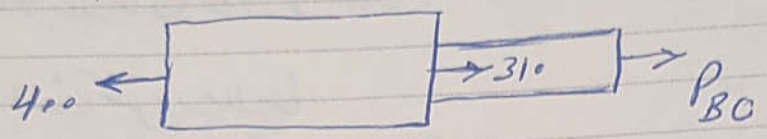
مثال) بزرگترین تنش قائم را در میله زیر بدست آورید:



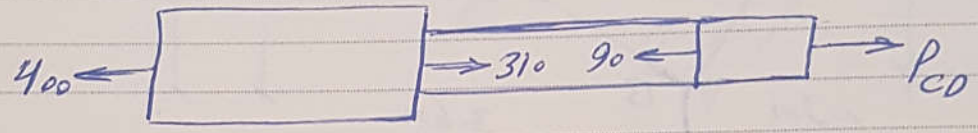


$P_{AB} = 400\ kN$

۲۲ دوشنبه / 12,Mon.
شهریور / September , 2016
۱۰ ذی‌الحجه ۱۴۳۷



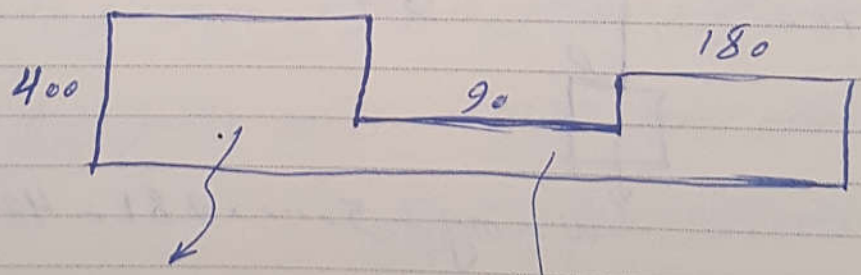
$$P_{BC} + 310 = 400 \rightarrow P_{BC} = 90\ kN$$



$$P_{CD} + 310 = 400 + 90 \rightarrow P_{CD} = 180\ kN$$

عید سعید قربان (تعطیل)

۲۳ سه شنبه / 13,Tue.
شهریور / September , 2016
۱۱ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

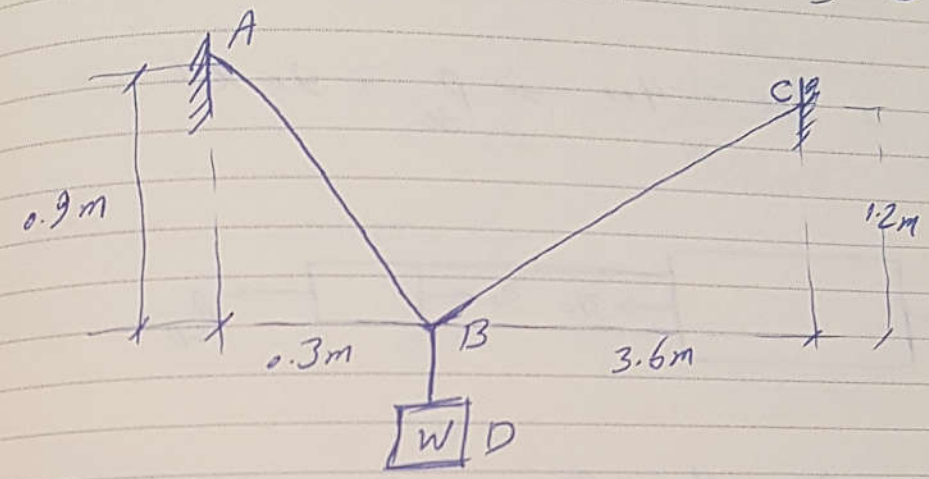


$$\sigma_{AB} = \frac{400}{0.0025} = 160000\ \frac{kN}{m^2}$$

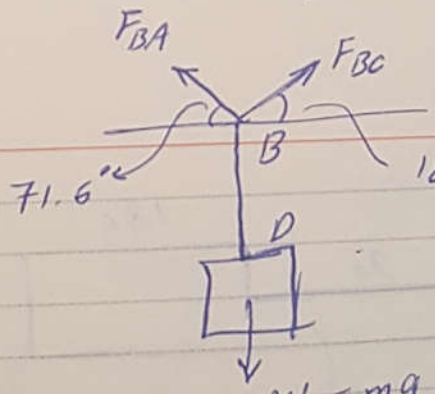
$$\sigma_{BC} = \frac{90}{0.0012} = 75000\ \frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{180}{0.0012} = 150000\ \frac{kN}{m^2}$$

مثال) قطر میله های AB و BD، mm 20 و قطر میله BC، mm 13 می باشد.
مطلوب است تنش در میله ها:



ابتدا، نیروهای موجود در میله ها را بدست آوریم:



$$W = mg = 50000 \times 9.81 = 490500\ N$$

$$F_{BA} \sin 71.6 + F_{BC} \sin 18.4 = 490500\ N$$

$$0.95 F_{BA} + 0.32 F_{BC} = 490500$$

$$-F_{BA} \cos 71.6 + F_{BC} \cos 18.4 = 0$$

$$-0.32 F_{BA} + 0.95 F_{BC} = 0$$

$F_{BC} = 156960\ N \rightarrow \sigma_{BC} = \frac{156960}{\frac{\pi(13)^2}{4}} = 1182.5\ MPa$

$F_{BA} = 52871\ N \rightarrow \sigma_{BA} = \frac{52871}{\frac{\pi(20)^2}{4}} = 168.3\ MPa$

$F_{BD} = 490500\ N \rightarrow \sigma_{BD} = \frac{490500}{\frac{\pi(20)^2}{4}} = 1561.3\ MPa$

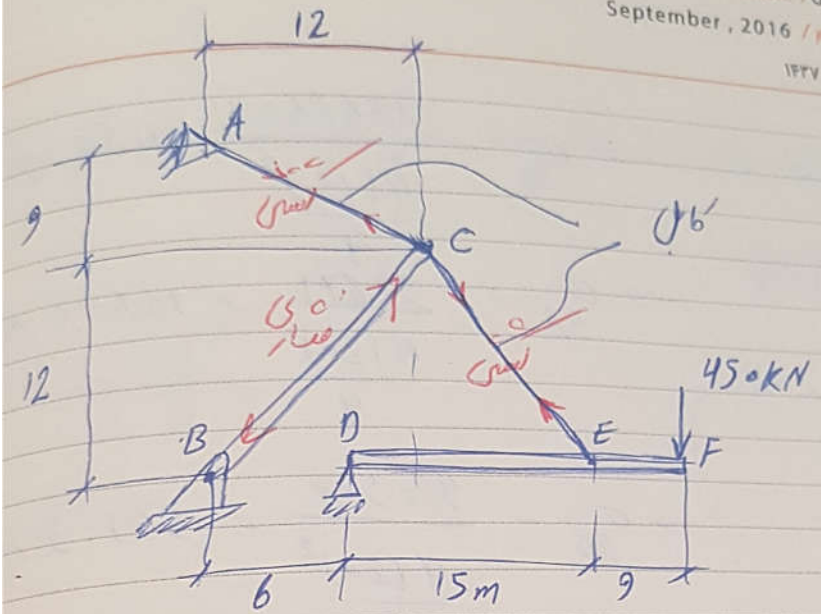
تنش مجاز: در آزمایشگاه، نمونه‌های مصالح معلوم، تحت شرایط فیزیکی و دمای ساخت واقعی، با دقت مطلوب اندازه‌های خواسته شده تهیه می‌شوند. سپس این نمونه‌ها تحت نیروهای افزاینده

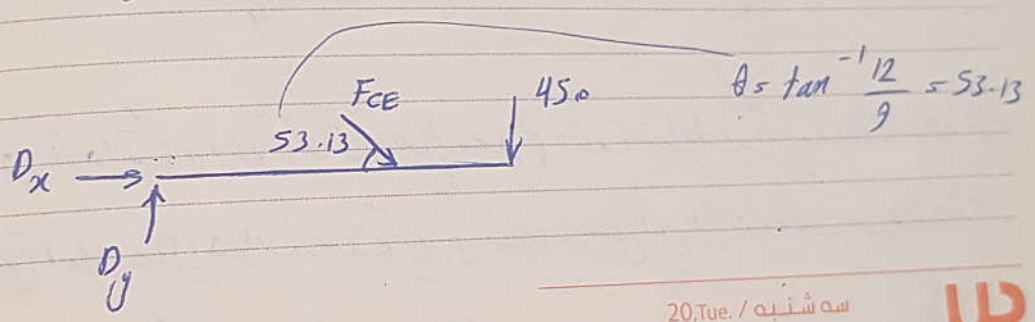
ولادت حضرت امام علی النقی الهادی (ع) (۲۱۲ هـ ق) - روز شعر و ادب فارسی - روز بزرگداشت استاد سید محمد حسین شهریار

قرار می‌گیرند. در آزمایش کششی معمولی یک نمونه به شکل میله‌گرد تحت کشش قرار می‌گیرد و مقدار کشش تا آنجا افزایش پیدا می‌کند که نمونه گسیخته گردد. نیروی که باعث گسیختگی در نمونه می‌گردد، بار نهایی نامیده می‌شود. با تقسیم بارهای برسطح مقطع اولیه نمونه، مقاومت (تنش) نهایی مصالح بدست می‌آید.

برای طرح یک عضو، از یک حد کم تنش مجاز نامیده می‌شود، استفاده می‌کنند. این تنش به لحاظ قابل ملاحظه‌ای پایین‌تر از تنش نهایی بدست آمده در آزمایشگاه است.

مثال) مطلوب است محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی. چنانچه تنش مجاز کششی و فشاری به ترتیب برابر ۱۴۰ و ۷۰ MPa باشد، مساحت لازم برای سطح مقطع اعضای AC، BC و CE را تعیین کنید.

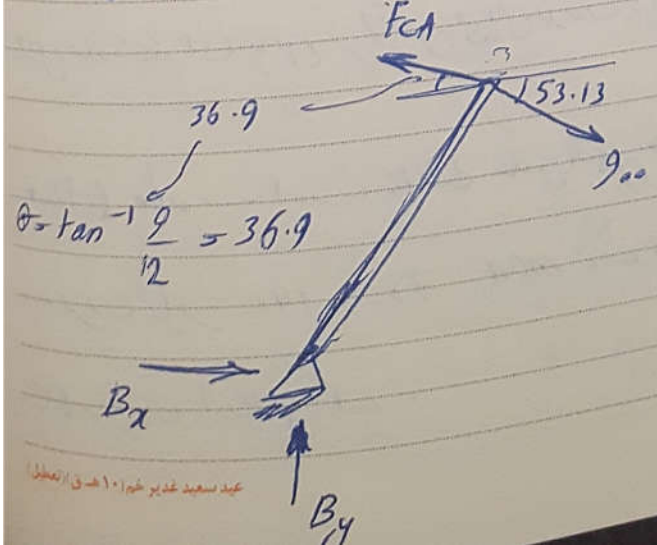




$$\sum M_D = 0 \rightarrow F_{CE} \sin 53.13 \times 15 = 450 \times 24 \rightarrow \boxed{F_{CE} = 900\ kN}$$

$$D_x = 900 \cos 53.13 = 540\ kN$$

$$D_y + 900 \sin 53.13 = 450 \rightarrow D_y = -270\ kN$$



$$F_{CA} \sin 36.9 = 900 \sin 53.13$$

$$\boxed{F_{CA} = 1199.16\ kN}$$

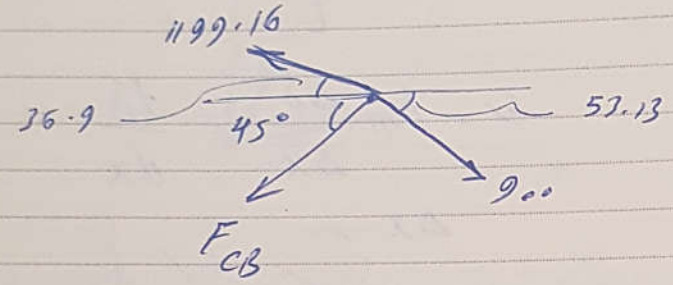
عید سعید غدیر خم ۱۰۱ هـ ق / تعطیل

۳۱ چهارشنبه / 21,Wed.
شهریور / September , 2016
۱۹ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

$$B_x + 900 \cos 53.13 = 1199.16 \cos 36.9$$

$$\rightarrow B_x = 419$$

$$B_y + 1199.16 \sin 36.9 = 900 \sin 53.13 \rightarrow B_y = 0$$



$$F_{CB} \cos 45 + 1199.16 \cos 36.9 = 900 \cos 53.13$$

$$\rightarrow \boxed{F_{CB} = -592.5 \text{ kN}}$$

آغاز جنگ تحمیلی (۱۳۵۹ هـ.ش) - آغاز هفته دفاع مقدس

پنجشنبه / 22,Thu.
شهریور / September , 2016
۲۰ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

$\sigma_{\text{حد تسلیم}} = 140 \text{ mpa}$

$\sigma_{\text{مجاز}} = 70 \text{ mpa}$

A_{AC} , A_{CE} , A_{BC} = ?

ولادت حضرت امام موسی کاظم (ع) (۱۰۸ ه ق)

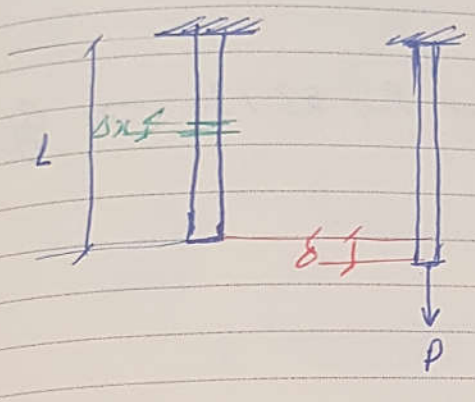
۲ جمعه / 23,Fri.
شهریور / September , 2016
۲۱ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

$$\sigma_{AC} = 140 = \frac{1199.16 \times 1000}{A_{AC}} \rightarrow A_{AC} = 8565.4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{CE} = 140 = \frac{900 \times 1000}{A_{CE}} \rightarrow A_{CE} = 6428.6 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{BC} = 70 = \frac{592.5 \times 1000}{A_{BC}} \rightarrow A_{BC} = 8464.3 \text{ mm}^2$$

کرنش : به نسبت تغییر شکل به طول میله کرنش گویند.

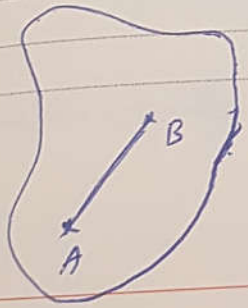


$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

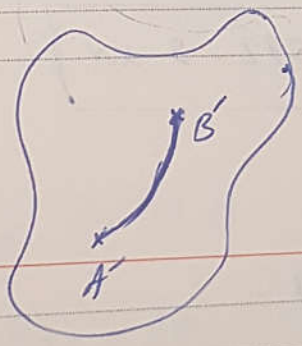
$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

کرنش در یک نقطه (بدون بعد)

یا به عبارت دیگر در حالت کلی :



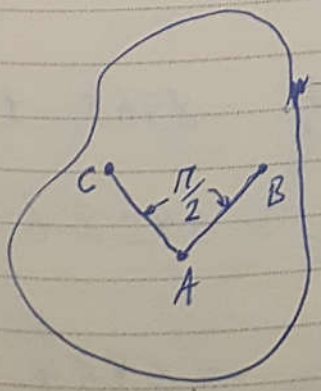
جسم تغییر شکل نیافته



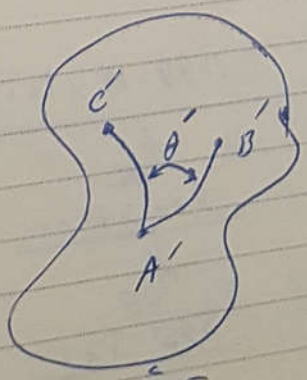
جسم تغییر شکل یافته

$$\varepsilon = \frac{AB' - AB}{AB}$$

در اثنای تغییر شکل یک جسم ، تغییر در زاویه بین دو امتداد محور به هم ، کرنش برشی نامیده شده و با γ نشان داده می شود.



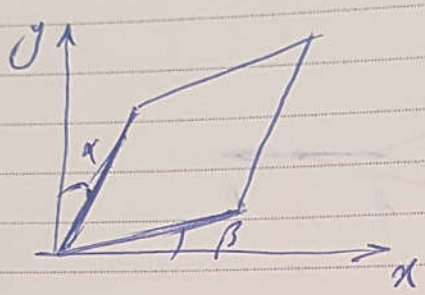
جسم تغییر شکل نیافته



جسم تغییر شکل یافته

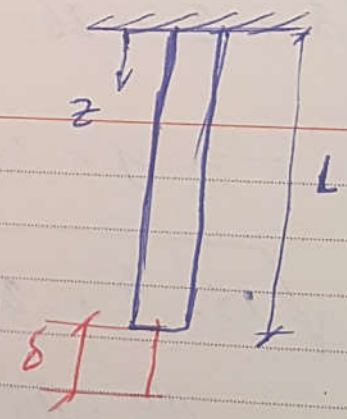
$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ کرنش برشی

γ هنگامی مثبت است که زاویه الحاق کاهش یابد و از حالت اولیه ($\alpha = 90^\circ$) کوچکتر شود.



$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$

مثال) میله‌ای داده شده تحت اثر وزنش دارای کرنش متغیر در طول به صورت $\varepsilon = kz$ است. تغییر مکان انتهای میله (نقطه B) را بیابید.



$\varepsilon = kz$

$\varepsilon = \frac{d\delta}{dz} = kz$

$0 < z < L$

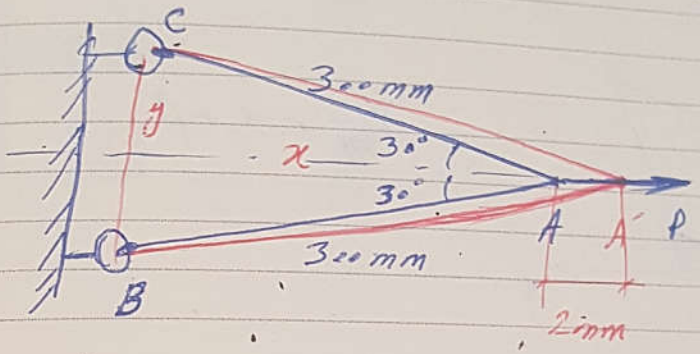
$\delta = \int_0^L kz\, dz = \frac{kz^2}{2}\Big|_0^L = \frac{kL^2}{2}$

$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{kL^2/2}{L} = \frac{kL}{2}$

$L_{\text{جدید}} = L + \frac{kL}{2} = L\left(1 + \frac{k}{2}\right)$

28,Wed. / چهارشنبه
September , 2016 / مهر
۲۶ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

مثال) نقطه A تحت تأثیر نیروی P به اندازه 2mm تغییر مکان در جهت افق داده است.
کرنش حاصل در هر یک از مفتول های AC و AB را بیابید:



$\varepsilon_{AC} , \varepsilon_{AB} = ?$

$\cos 30 = \frac{x}{300} \rightarrow x = 300 \cos 30 = 259.8 mm$

روز بزرگداشت فرماندهان شهید دفاع مقدس - شهادت سرداران اسلام: فلاحی، فکوری، نامجو، کلاهدوز و جهان آرا (۱۳۶۰ هـ.ش) - روز آتش نشانی و ایمنی - روز بزرگداشت شمس

29,Thu. / پنجشنبه
September , 2016 / مهر
۲۷ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

$x_{A'} = 259.8 + 2 = 261.8 mm$

$\sin 30 = \frac{y}{300} \rightarrow y = 300 \sin 30 = 150 mm$

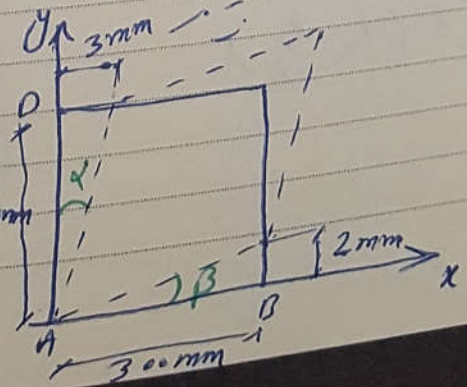
$A'B = A'C = \sqrt{150^2 + 261.8^2} = 301.73 mm$

$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{AB} = \frac{A'B - AB}{AB} = \frac{301.73 - 300}{300} \approx 0.0058$

روز بزرگداشت مولوی

30,Fri. / جمعه
September , 2016 / مهر
۲۸ ذی‌الحجه ۱۴۳۷

مثال) کرنش برشی متوسط γ_{xy} را در نقطه A بیابید:



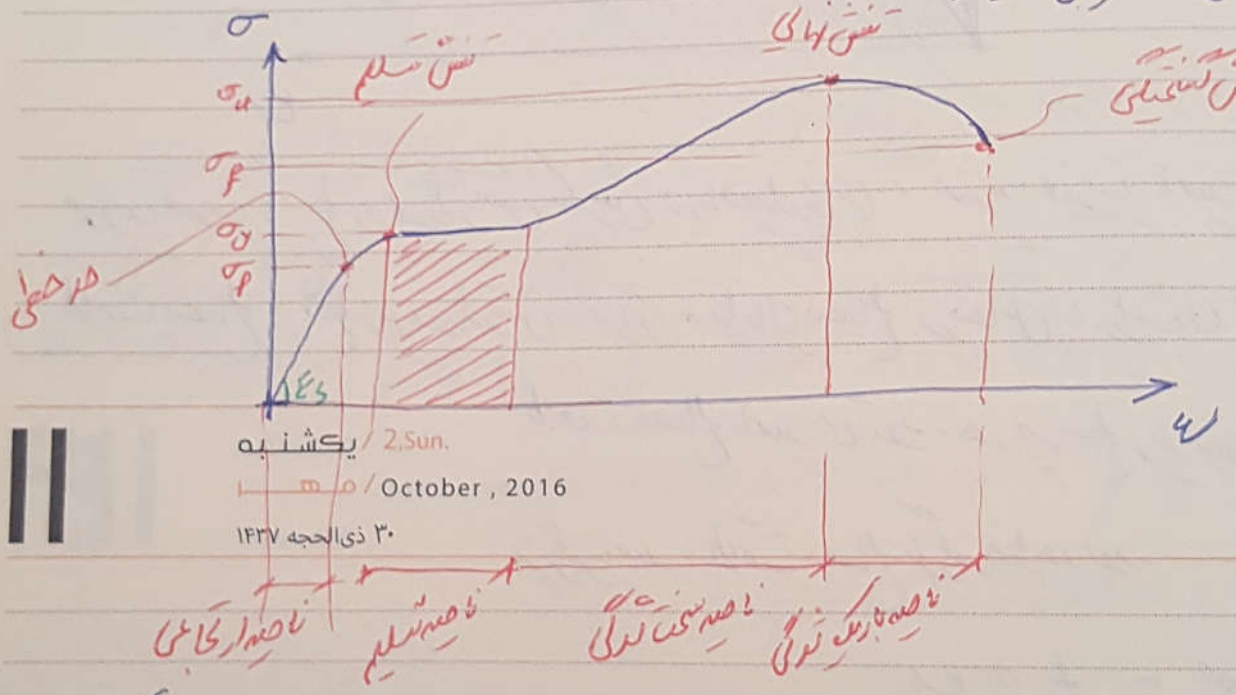
روز همبستگی و همدردی با کودکان و نوجوانان فلسطینی

$$\gamma_{zy} = \alpha + \beta = 0.81$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4.0} = 0.43$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{2}{3.0} = 0.38$$

نمودار تنش - کرنش فولاد:



شیب نمودار در ناحیه خطی را ضریب ارتجاعی یا مدول E نشان می‌دهند. از نظر فیزیکی نشان دهنده سختی مصالح است. مطابق قانون هوک، بین تنش و کرنش رابطه خطی زیر برقرار است:

$$\sigma = E\varepsilon$$

نام های دیگر E ضریب یانگ یا ضریب الاستیسیته نیز می‌باشد.

خاصیت ارتجاعی: در عرف به مصالحی ارتجاعی گفته می‌شود که پس از حذف نیروهای مؤثر، کاملاً به ابعاد اولیه خود برگردند. به عبارت دیگر مصالح شکل اولیه خود را کاملاً باز یابند. بنابراین رفتار ارتجاعی این مفهوم را دارد که هیچ گونه تغییر شکل دائمی بوجود نمی‌آید.

۱۸ شنبه / 7,Sat.
دی / January , 2017
۸ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

فصل ۵ :

نیروهای مختلفی که به تیر وارد می‌شود باعث ایجاد نیروهای داخلی در مقطع آن می‌شود. این نیروها شامل نیروهای محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی می‌باشند. هرکدام از این نیروهای داخلی در مقطع وارده، تنش‌هایی ایجاد می‌کند. تنش ناشی از نیروی محوری، تنش محوری (قائم) می‌باشد که در فصل گذشته بررسی شد.

به تنش ناشی از لنگرهای خمشی، تنش خمشی گفته می‌شود که نوع آن نیز از نوع تنش قائم می‌باشد. روش محاسبه این نوع تنش در این فصل بررسی می‌شود. برای این منظور تیری با مقطع خالص در نظر بگیرید و از فرضیات ساده‌کننده زیر استفاده می‌کنیم:

ولادت حضرت امام حسن عسکری (ع) (۲۳۲هـ.ق)

۱۹ یکشنبه / 8,Sun.
دی / January , 2017
۹ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

۱- بارها برخی از محورهای اصلی تیر منطبق هستند و همه در یک صفحه قرار دارند.

۲- ضریب ارتجاعی (مدول الاستیسیته) تیر برای کشش و فشار یکسان است.

۳- مقاطعی که عمود بر میانی تیر هستند پس از تغییر شکل به صورت مسطح و عمود بر آن باقی می‌مانند.

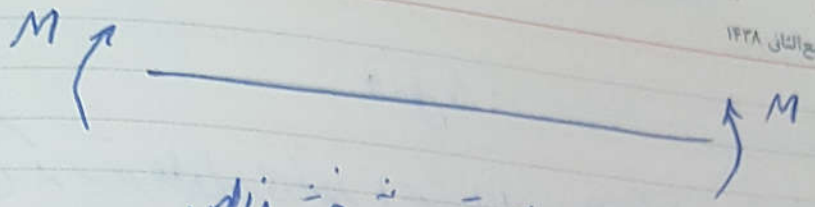
۴- تیر به صورت منشوری بوده و سطح مقطع آن در طول دهانه ثابت می‌باشد.

فرض اساسی هندسی مسئله خمش:

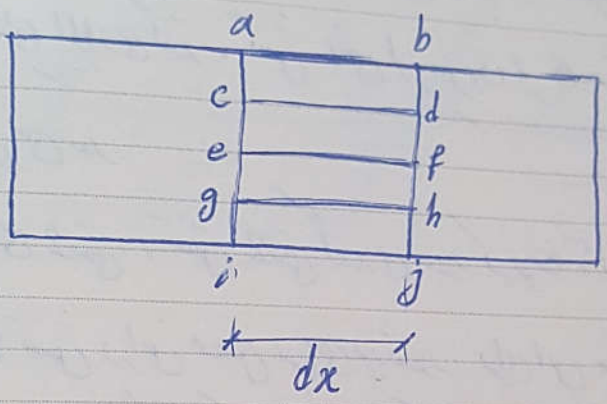
انقلاب اسلامی مردم قم (۱۳۵۶ هـ.ش)

۲۰

دوشنبه / 9,Mon.
January , 2017 / دی
۱۰ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸



تیر تحت اثر خمش خالص

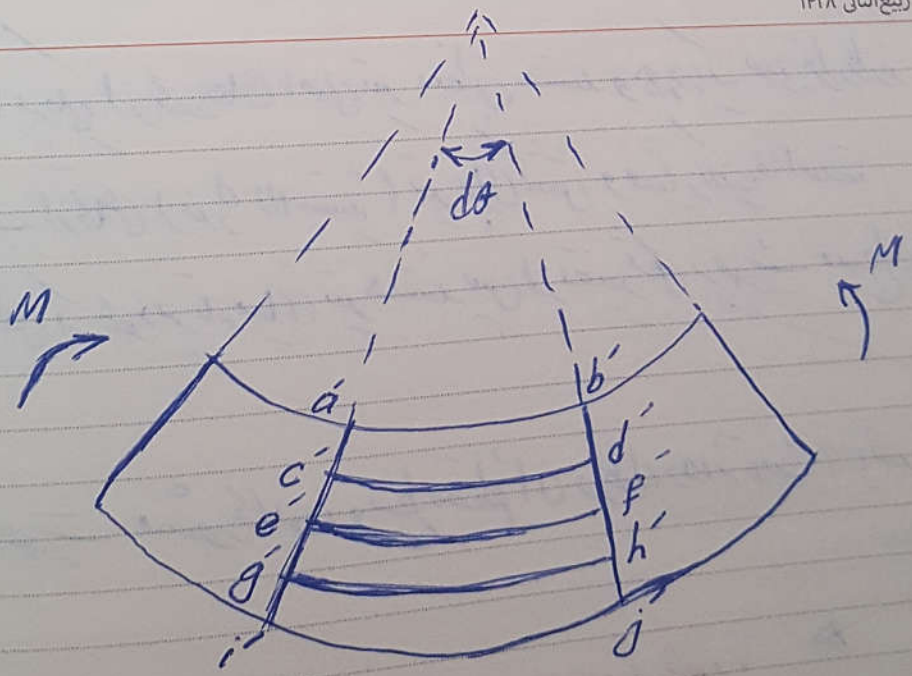


تیر قبل از خمش

وفات حضرت معصومه (س) (۲۰۱ هـ.ق) - شهادت میرزا تقی خان امیرکبیر (۱۲۳۰ هـ.ش)

۲۱

سه شنبه / 10,Tue.
January , 2017 / دی
۱۱ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸



تیر بعد از خمش

۲۲ چهارشنبه / 11,Wed.
دی / January , 2017
۱۲ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

① خطوط ai ، bj در سطح تیر، پس از خمش نیز همچنان به حالت مستقیم باقی می‌مانند. در واقع، مقاطع عمود بر راستای تیر پس از تغییر شکل به صورت مسطح و عمود بر راستای تیر باقی می‌مانند.

② خطوط ab ، cd که در قسمت مقعر تیر قرار دارند، کوتاه شده‌اند.

③ خطوط ef ، gh که در قسمت محدب تیر قرار دارند، پس از تغییر شکل طویل می‌شوند.

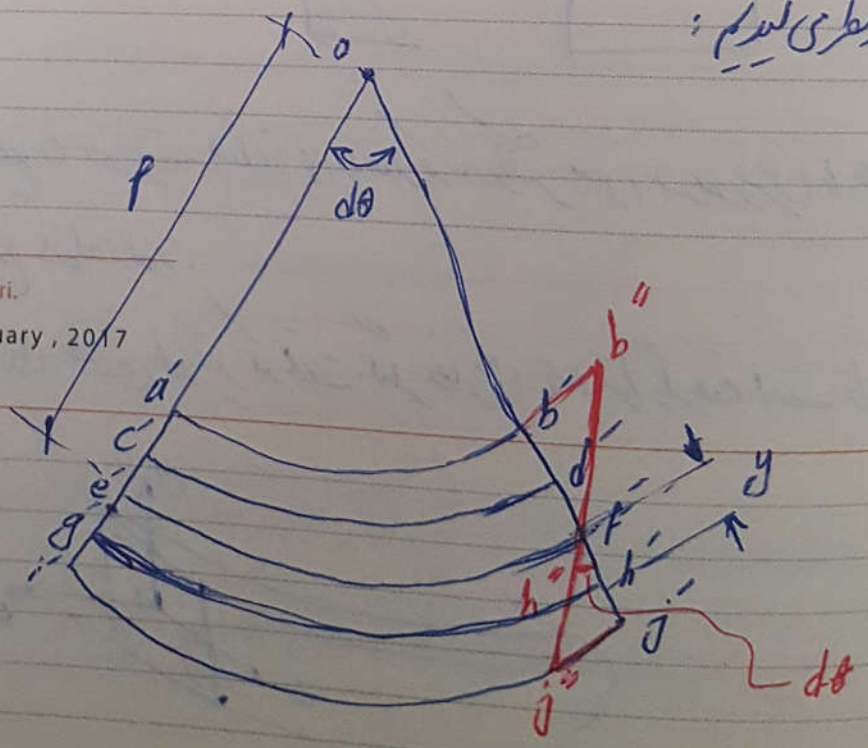
④ به عبارت دیگر تارهای فوقانی فشرده شده‌اند و تارهای پایینی کشیده می‌شوند.

⑤ بین تارهای cd ، gh همواره می‌توان تاری یافت به طوری که طول آن تغییر نکرده و به عبارت دیگر تحت تأثیر هیچ گونه نیروی کششی یا فشاری قرار ندارند. به تارهای مانند تار ef ، تار خنثی (Neutral axis) گویند. تنش روی این تار صفر است.

تشکیل شورای انقلاب به فرمان حضرت امام خمینی (ره) (۱۳۵۷ هـ.ش)

۲۳ پنجشنبه / 12,Thu.
دی / January , 2017
۱۳ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

برای بررسی تغییر طول تارهای مختلف تیر، المان تغییر شکل یافته a'b' از تیر را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



۲۴ جمعه / 13,Fri.
دی / January , 2017
۱۴ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

$$d\theta = \frac{h'h''}{f'h'} \rightarrow h'h'' = f'h' \cdot d\theta = -y \cdot d\theta$$

$$g'h'' = e'f'$$

$$oe' = \rho \rightarrow d\theta = \frac{e'f'}{oe'} = \frac{e'f'}{\rho}$$

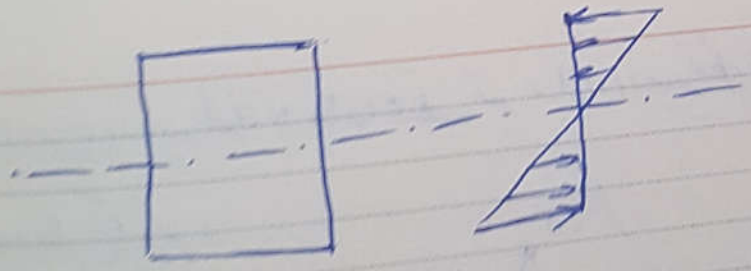
$$-g'h'' = e'f' = \rho \cdot d\theta$$

کرنش نار تغییر شکل یافته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{h'h''}{g'h''} = \frac{-y \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{-y}{\rho}$$

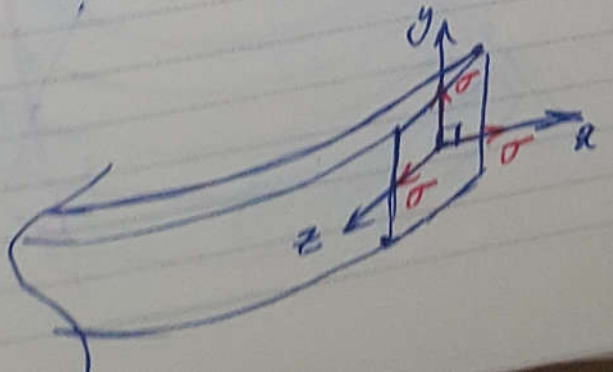
$$\sigma = \varepsilon E = -\frac{Ey}{\rho} = -\frac{E}{\rho} y \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-E}{\rho} y} \quad (1)$$

یعنی تنش در ارتفاع تیر با y (فاصله از تار خنثی) نسبت مستقیم دارد.



نمودار تنش در ارتفاع مقطع به صورت مثلثی می‌باشد که حداکثر تنش در دورترین تار از خنثی در لبه‌های بالا و پایینی مقطع خواهد بود.

در این قسمت معادلات تعادل قسمتی از تیر که تحت تنگر خارجی M قرار گرفته است را می‌نویسیم.



۲۵ دوشنبه / 16,Mon.
/ January , 2017
۱۷ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

معادلات تعادل در جهت x :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma\, dA = 0 \rightarrow \int_A -\frac{E}{\rho} y\, dA = 0 \rightarrow -\frac{E}{\rho}\int_A y\, dA = 0$$

$-\frac{E}{\rho} \neq 0$ چون $\rightarrow$ می‌باشد پس این عبارت نشان دهنده ممان استاتیک سطح حول محور z ها است. یعنی ممان استاتیک حول محوری که از مرکز هندسی سطح عبوری کند مساوی صفر است. بنابراین، این نتیجه حاصل می‌شود که در یک تیر تحت اثر خمش خالص، محور خنثی از مرکز هندسی سطح مقطع می‌گذرد.

$$\int_A y\, dA = 0 \rightarrow$$

معادلات تعادل لنگر در جهت z :

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A (\sigma \cdot dA)\cdot y + M = 0 \rightarrow$$

شهادت نواب صفوی، طیبه‌امسی، برادران واحدی و ذوالقدر از فداییان اسلام (۱۳۳۴ هـ ش)

۲۶ سه شنبه / 17,Tue.
/ January , 2017
۱۸ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

$$\int_A -\frac{E}{\rho} y^2\, dA + M = 0 \rightarrow$$

$$\frac{E}{\rho}\int y^2\, dA = M \rightarrow$$

$\int y^2\, dA \rightarrow$ با یادآوری از استاتیک تعریف ممان اینرسی سطح مقطع تیر نسبت به محور z ها (یا تار خنثی) است که آنرا با I نشان می‌دهند.

$$\boxed{\frac{EI}{\rho} = M} \quad (۲)$$

در رابطه نشان داده شده، بین لنگر M و شعاع انحنا ρ رابطه عکس وجود دارد. یعنی با افزایش لنگر وارده شعاع انحنا کاهش می‌یابد و تیر بیشتر خمیده می‌شود.

با جایگذاری ρ (شعاع انحنا) از رابطه ① در رابطه ② داریم:

$$\rho = \frac{-E}{\sigma}y \rightarrow \frac{EI}{-\frac{E}{\sigma}y} = M \rightarrow -I\sigma = My$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-My}{I}} \quad ③$$

این رابطه (رابطه ③) بسیار مهمی می‌باشد و در تعیین تنش عمودی حاصل از لنگر خمشی استفاده می‌شود. این نوع تنش را تنش خمشی گویند.

M : لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

I : ممان اینرسی سطح مقطع نسبت به تار خنثی

روز غزه

y : فاصله تار مورد نظر از تار خنثی (تارهای بالایی با علامت مثبت و تارهای زیر تار خنثی با علامت منفی)

σ : تنش عمودی ناشی از لنگر خمشی در تار مورد نظر از مقطع تحت مطالعه

اساس مقطع یا مدول مقطع (section modulus): تنش خمشی در سطح مقطع نظیر خطی (متناسب با y) تغییر کرده و مقدار max آن در تارهای بالایی یا پایینی تیر خواهد بود. اگر دورترین تار از تار خنثی را با y_{max} نشان دهیم،

۲ شنبه / 21,Sat
بهمن / January , 2017
۲۲ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

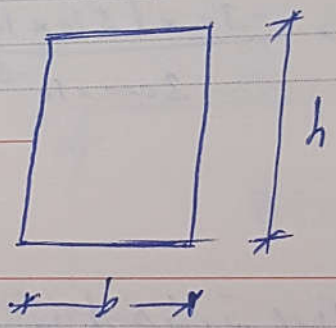
حداکثر تنش خمشی در یک سطح مقطع برابر است با:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M.y_{max}}{I} = \pm \frac{M}{I/y_{max}} = \pm \frac{M}{S}$$

بنابراین: $\sigma_{max} = \pm \frac{M}{S}$ (۴)

که در این رابطه $S = \frac{I}{y_{max}}$ را اساس مقطع یا مدول مقطع می گویند. مدول مقطع از مشخصات هندسی مقطع بوده و برای یک سطح مقطع یک مقدار ثابت می باشد.

۳ یکشنبه / 22,Sun.
بهمن / January , 2017
۲۳ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

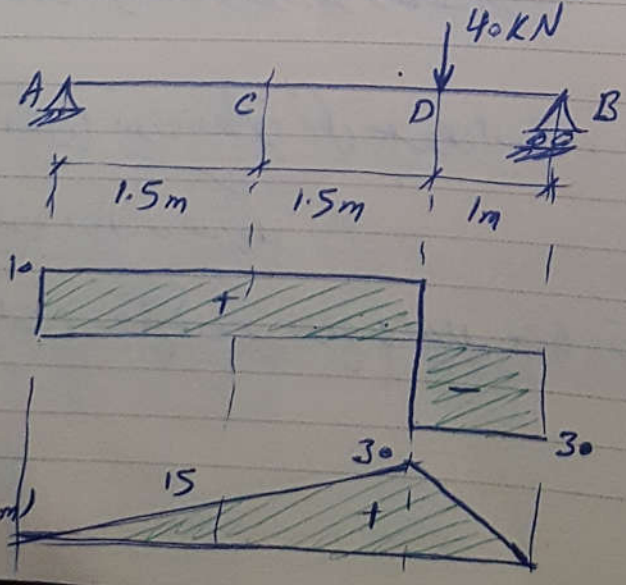


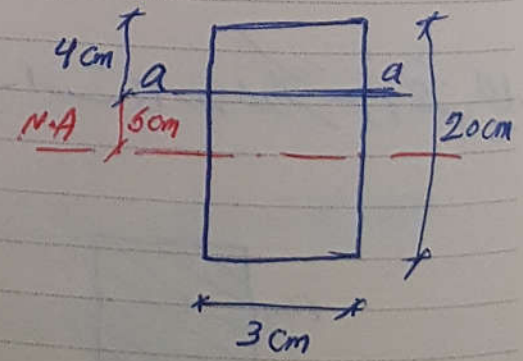
$$y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

مثال) تیری با سطح مقطع مستطیلی مطابق شکل مفروض است، تنش ایجاد شده در تار a در مقاطع C ، D و همچنین حداکثر تنش خمشی تیر را محاسبه نمایید:





$R_B(4) = 40 \times 3 \rightarrow R_B = 30\,KN$

$R_A = 10\,KN$

① تنش ایجاد شده در مقطع C :

$$\sigma_C = \frac{-My}{I} = \frac{-15 \times (6\times10^{-2})}{2000\times10^{-8}} = -45000 \frac{kN}{m^2} = -45\ MPa$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{3\times2^3}{12} = 2000\times10^{-8}\ m^4$$

② تنش ایجاد شده در مقطع D :

$$\sigma_D = \frac{-My}{I} = \frac{-30\times(6\times10^{-2})}{2000\times10^{-8}} = -90000 \frac{kN}{m^2} = -90\ MPa$$

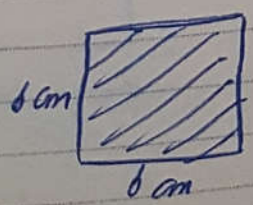
③ تنش Max در کل تیر :

$$\sigma_{max} = -\frac{My_{max}}{I} = \frac{-30\times(\pm10\times10^{-2})}{2000\times10^{-8}} = \mp150000 \frac{kN}{m^2} = \mp150\ MPa$$

نتیجه : تنش های بوجود آمده مستقل از جنس تیری باشند و به مشخصات هندسی و نیروهای وارده بستگی دارند. یعنی اگر جنس تیر از آلومینیوم ، فولاد ، مس و یا حتی از چوب باشد ، باز هم همان تنش ها در تیر بوجود می آید. جنس تیرها در تعیین مجاز یا غیرمجاز بودن تنش های بوجود آمده دخالت دارد.

مثال) تیری مطابق شکل مفروض است ، مطلوب است محاسبه حداکثر تنش خمشی ایجاد شده در آن در صورتیکه

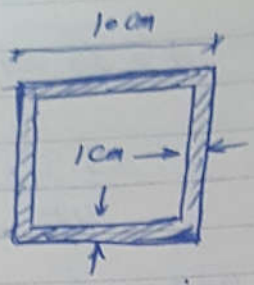
الف) مقطع آن یک مربع به ابعاد 6Cm باشد.



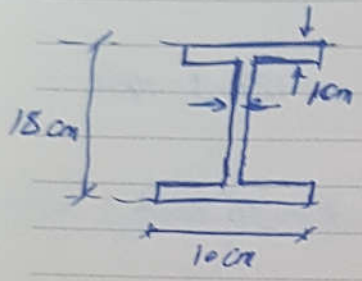
چهارشنبه / 25,Wed.
بهمن / January , 2017
۲۴ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

ب) مقطع آن یک مستطیل با ابعاد $3 \times 12\ cm^2$ باشد.

ج) مقطع آن یک قوطی باشد.

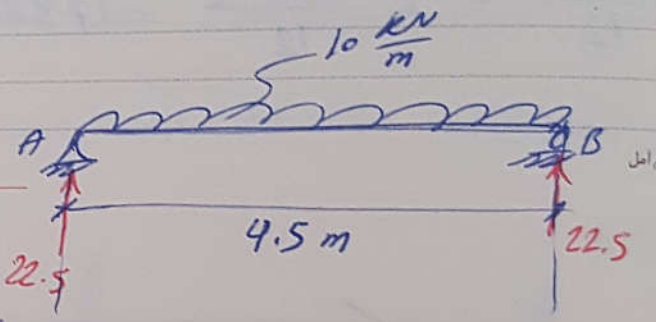


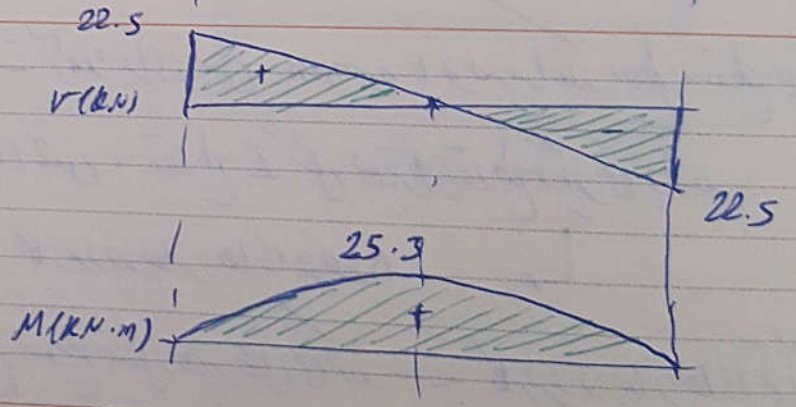
د) مقطع آن به صورت تیرورق به شکل مقابل باشد.



پنجشنبه / 26,Thu.
بهمن / January , 2017
۲۷ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

ه‍)





جمعه / 27,Fri.
بهمن / January , 2017
۲۸ ربیع‌الثانی ۱۴۳۸

الف) $\sigma_{max} = \pm \frac{MY_{max}}{I} = \pm \frac{25.3 \times 3 \times 10^{-2}}{108 \times 10^{-8}} = 702.8\ mpa$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \times 6^3}{12} = 108\ cm^4$, $A = 36\ cm^2$

ب) $\sigma_{max} = \pm \frac{M y_{max}}{I} = \pm \frac{25.3 \times 6 \times 10^{-2}}{432 \times 10^{-8}} = 351.4 \text{ mpa}$

$I = \frac{3 \times 12^3}{12} = 432 \text{ cm}^4$ ، $A = 36 \text{ cm}^2$

ج) $\sigma_{max} = \pm \frac{M y_{max}}{I} = \pm \frac{25.3 \times 5 \times 10^{-2}}{492 \times 10^{-8}} = 257.1 \text{ mpa}$

$I = \frac{10 \times 10^3}{12} - \frac{8 \times 8^3}{12} = 492 \text{ cm}^4$ ، $A = 36 \text{ cm}^2$

د) $\sigma_{max} = \pm \frac{M y_{max}}{I} = \pm \frac{25.3 \times 9 \times 10^{-2}}{1788 \times 10^{-8}} = 127.3 \text{ mpa}$

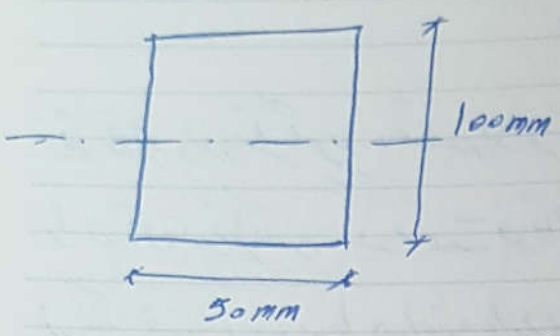
$I = \frac{10 \times 18^3}{12} - 2\frac{4.5 \times 16^3}{12} = 1788 \text{ cm}^4$ ، $A = 36 \text{ cm}^2$

نتیجه: با مقایسه اعداد بدست آمده برای تنش max و با توجه به اینکه سطح مقطع همه آنها برابر می باشند، می توان گفت برای خمش، مقاطع I شکل بهتر از مقاطع دیگری می باشند.

کاربرد در سازه های فولادی

مقاطع مستطیلی نیز از مقاطع مربع شکل بهتر عمل می کنند ← کاربرد در سازه های تن آرما

مثال) مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل 50×100 mm ، وقتی که خمش حول تار خنثی موازی با ضلع 50 mm اتفاق می افتد؛ (تنش مجاز چوب مساوی 8.4 Mpa می باشد).



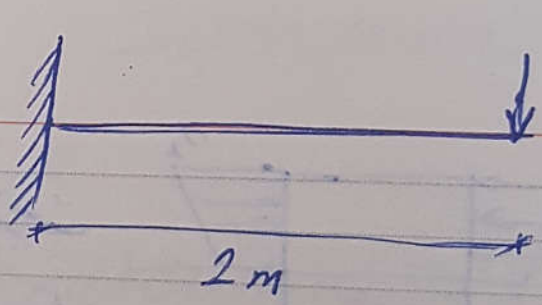
$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I} = 8.4$$

$$\frac{M \times 50}{4.17 \times 10^{6}} = 8.4$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{500 \times 100^3}{12} = 4.17 \times 10^6 \ mm^4$$

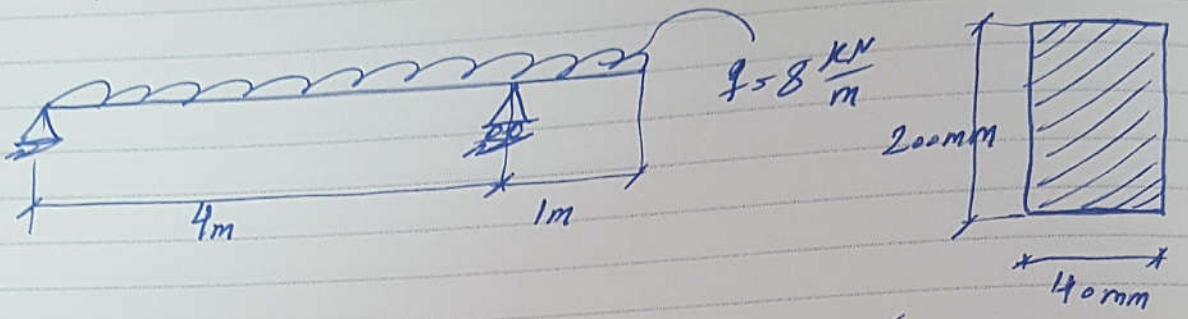
$$\rightarrow \boxed{M_{مجاز} = 0.7 \ kN.m}$$

مثل) تیری به شکل زیر مفروض است. مطلوب است طراحی این تیر با مقطع I شکل، چنانچه تنش مجاز خمشی فولاد 140 MPa باشد.



شنبه / 18,Sat.
بهمن / February , 2017
۲۰ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

تمرین) تیری مطابق شکل و با سطح مقطع داده شده مفروض است. مطلوب است محاسبه:



الف) تنش خمشی و برشی ماکزیمم ایجاد شده را در تیر بیابید.

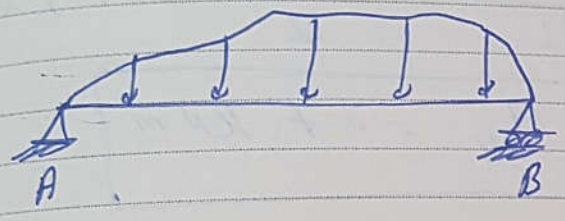
ب) تنش خمشی و برشی را در تاری به فاصله 40mm از ضلع بالایی تیر بیابید.

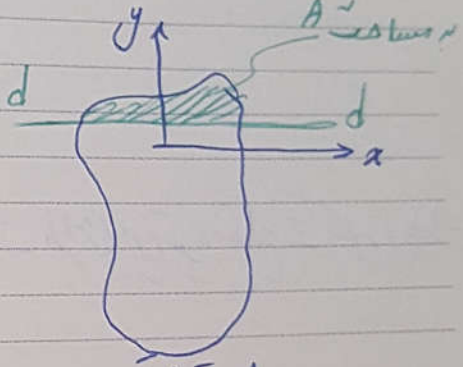
یکشنبه / 19,Sun.
اسفند / February , 2017
۲۱ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

۱۳ چهارشنبه / 1,Wed. / February , 2017 / بهمن / ۳ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

فصل ۶ :

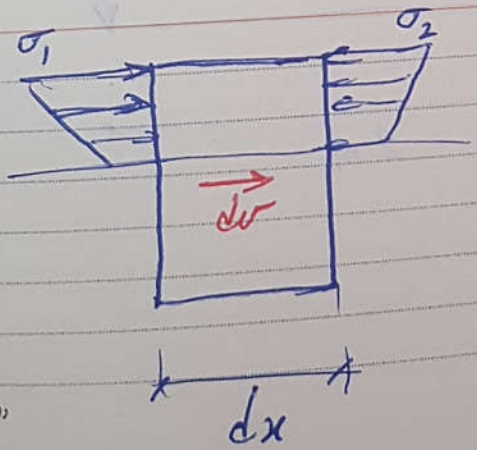
تیر AB را در نظر بگیرید، قطعه ای از آنرا که برای مقطع زیر است، جدا نموده و برش افقی d را در آن در نظر بگیرید. در قسمت فوقانی برش زده شده، تنش های عمودی σ_1 و σ_2 حاصل از تنگر خمش بر دو سطح جدا شده وارد می شوند.





سطح مقطع تیر

۱۴ پنجشنبه / 2,Thu. / February , 2017 / بهمن / ۴ جمادی‌الاول ۱۴۳۸



نیروی وارد شده از سمت چپ به قطعه $dx = \int_A \sigma_1 \, dA$

نیروی وارده از سمت راست به این قطعه $= \int_A \sigma_2 \, dA$

۱۵ جمعه / 3,Fri. / February , 2017 / بهمن / ۵ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

چنانچه تنگر خمش موجود در سمت چپ قطعه که تنش σ_1 را بوجود آورد برابر M_1 باشد، تنگر موجود در سمت راست آن $M_1 + dM$ خواهد بود.

$$\sigma_1 = -\frac{M_1 y}{I} \quad , \quad \sigma_2 = -\frac{(M_1 + dM) y}{I}$$

روز فناوری فضایی

ولادت حضرت زینب (س) (۵ هـ ق) و روز پرستار

بنابراین معادله تعادل در جهت x را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma_1 dA - \int_A \sigma_2 dA + dV = 0 \rightarrow$$

$$\int_A \frac{M_1 y}{I} dA - \int_A \frac{(M_1 + dM) y}{I} dA + dV = 0$$

از آنجایی که M_1 ، dM و I روی سطح انتگرال‌گیری ثابت‌اند، می‌توان آن‌ها را از پرانتز انتگرال‌گیری بیرون گذاشت:

$$\frac{M_1}{I} \int_A y dA - \frac{M_1 + dM}{I} \int_A y dA + dV = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{dM}{I} \int_A y dA = -dV$$

در رابطه بالا $\int_A y dA$ ممان استاتیک سطح A (سطح‌هاکور خودمون) نسبت به تار خنثی می‌باشد

که آنرا با Q نشان می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$dV = \frac{dM}{I} Q$$

dV نیروی برشی است که بین لایه‌های طولی تیر قرار دارد. با این فرض که dV روی سطح برش d به طور یکنواخت پخش شده است و شدت آزار با I نشان دهیم، داریم:

$$dV = I \cdot b \cdot dx$$

مساحت سطح برش صفحه‌ای ناصه‌ل است

عرض مقطع در ناحیه برش d

$$\rightarrow I \cdot b \cdot dx = \frac{dM}{I} \cdot Q$$

$$\rightarrow I = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q}{I \cdot b}$$

که در استاتیک دیده ایم که $V = \frac{dM}{dx}$ از کنار خشی در هر نقطه مشتق بگیریم، برش حاصل می شود).

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

رابطه فوق تنش برشی بین لایه های طولی تیری باشد. τ تنش برشی در لایه d در سطح مقطع شان داده شده است.

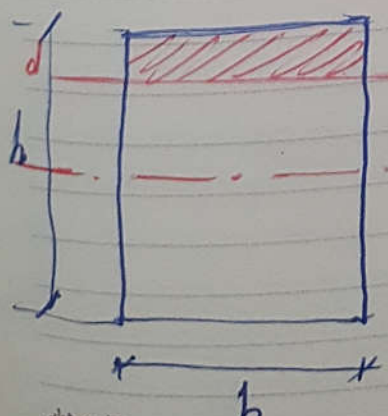
V : نیروی برشی در مقطع

Q : ممان استاتیک سطح بالای تیغه d نسبت به تار خنثی

I : ممان اینرسی نسبت به تار خنثی

b : عرض تیر در تراز تار d

با توجه به فرمول تنش برشی داده شده، از آنجا که مقادیر Q و b در هر نقطه از مقطع ممکن است متغیر باشند، پس تنش برشی در سطح مقطع یک تیر به طور ملکفی اخت تغییر می کند.



مقطع مستطیلی

۲۰ چهارشنبه / 8,Wed.
بهمن / February , 2017
۱۰ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) + y\right] =$$

$$\frac{\frac{h}{4} - \frac{y}{2} + y}{\frac{h}{4} + \frac{y}{2}}$$

$$b\left(\frac{h^2}{8} + \frac{hy}{4} - \frac{hy}{4} - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} \quad , \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

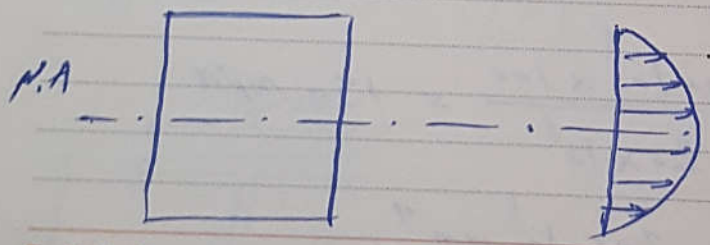
$$= \frac{V \times \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

با توجه به عبارت به دست آمده، تغیرات تنش برشی

۲۱ پنجشنبه / 9,Thu.
بهمن / February , 2017
۱۱ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

در ارتفاع مقطع مستطیلی بر حسب y از رابطه زیر

یعنی معادله سهمی می باشد.



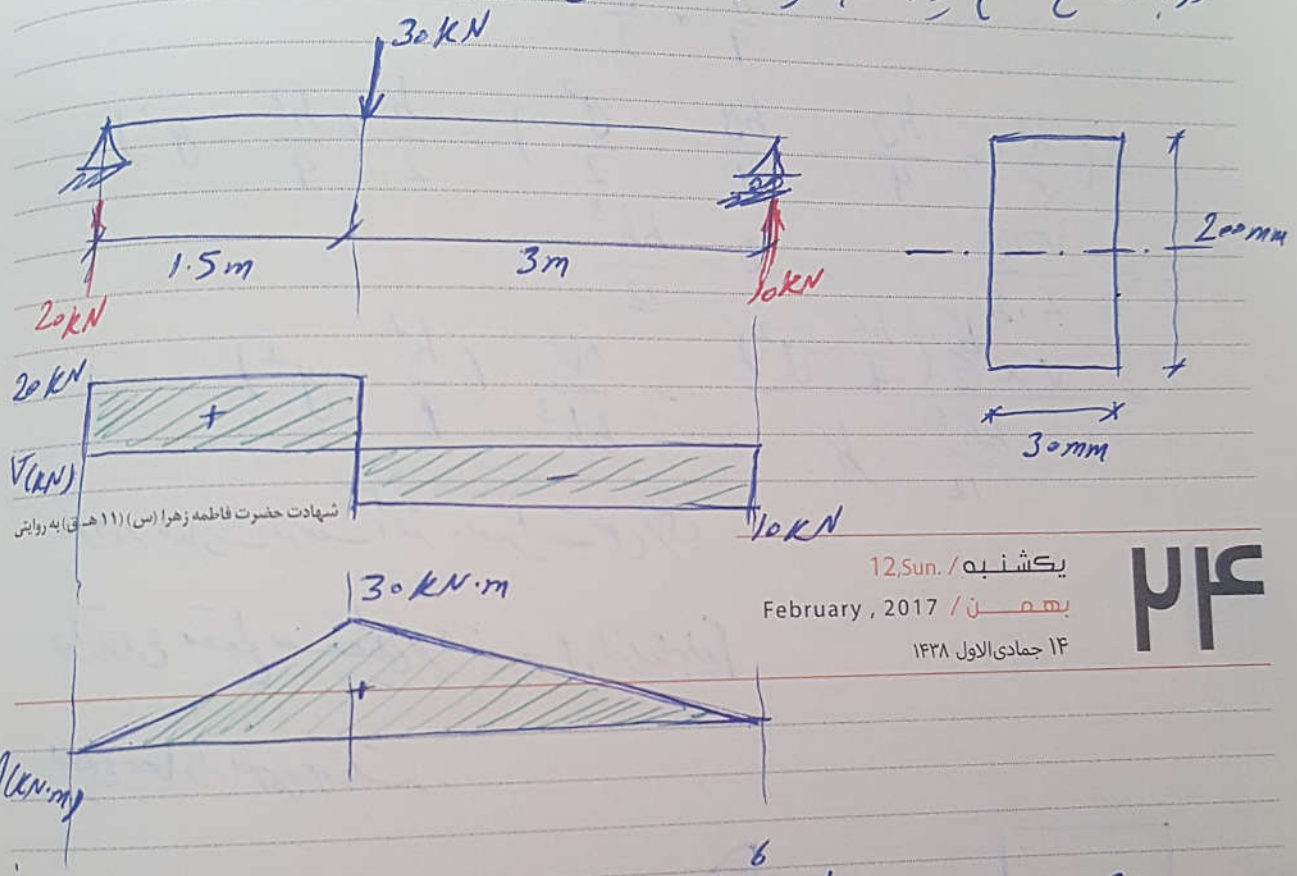
$$\tau_{max} = \frac{3V}{2b \cdot h} = 1.5\left(\frac{V}{A}\right)$$

۲۲ جمعه / 10,Fri.
بهمن / February , 2017
۱۲ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

مقدار تنش برشی متوسط در مقطع مستطیلی است

۲۳ شنبه / 11,Sat. / February , 2017 / بهمن / ۱۳ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

مثال) تیری به صورت زیر با مقطع داده شده موجود است، الف) حداکثر تنش خمشی و برشی ایجاد شده در تیر را حساب کنید. ب) تنش برشی را در مقطع وسط دهانه و در تاری به فاصله 3cm از بالای سطح مقطع تیر (تار بالایی) بدست آورید:



شهادت حضرت فاطمه زهرا (س) (۱۱ هـ ق) به روایتی

۲۴ یکشنبه / 12,Sun. / February , 2017 / بهمن / ۱۴ جمادی‌الاول ۱۴۳۸

الف) $\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I} = \frac{30 \times 10^6 \times 100}{20 \times 10^6} = 150\ MPa$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 200^3}{12} = 20 \times 10^6\ mm^4$

تنش برشی max روی تار خنثی اتفاق می افتد و همان اندازه سطح بالای تار خنثی برابر است با:

$Q_{max} = 30 \times 100 \times 50 = 150000\ mm^3$

$\tau_{max} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} = \frac{20000 \times 150000}{20 \times 10^6 \times 30} = 5\ MPa$

یا می‌توان از فرمول زیر بهره جست:

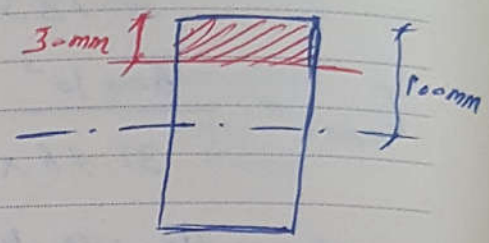
(در سطح مستطیلی)

$$\tau_{max} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5 \times \frac{2000}{200\times 30} = 5\ mpa$$

$$\tau = \frac{V\cdot Q}{I\cdot b} = \frac{100000\times 76500}{20\times 10^6 \times 30} =$$

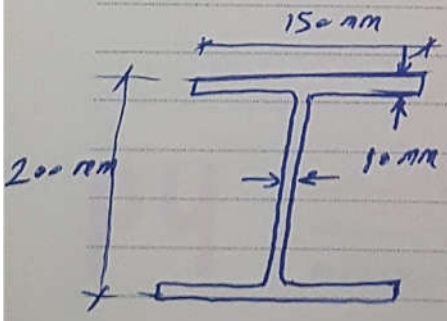
$$Q = 30\times 30\times 85 = 76500\ mm^3$$

$$= 1.275\ mpa$$



با توجه به قسمت الف مثال، تنش خمشی max نسبت به تنش برشی max دارای مقدار به مراتب بیشتری است. بنابراین در تیرها، تنش‌های خمشی از تنش برشی معمولا بیشتر می‌باشند.

مثال) یک تیر ورق I شکل با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. (مقطع لگ نیروی برشی برابر با 60kN می‌باشد.



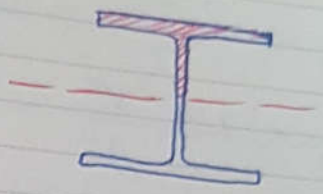
الف) تنش برشی max را محاسبه نمایید.

ب) تنش برشی را در محل اتصال جان به بال و در روی هریک از آنها حساب کنید:

الف) $I = \frac{150\times 200^3}{12} - \frac{140\times 180^3}{12} = 31.96\times 10^6\ mm^4$

تنش برشی max روی تار خنثی اتفاق می‌افتد.

$$\tau_{max} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$



$$Q = 90 \times 10 \times 45 + 150 \times 10 \times 95$$

$$= 183000\ mm^3$$

$$\tau_{max} = \frac{60 \times 10^3 \times 183000}{31.96 \times 10^6 \times 10} = 34.4\ MPa$$

ب) تنش برشی در محل اتصال جان به بال :

$$Q = 150 \times 10 \times 95 = 142500\ mm^3$$

$$\tau_{جان} = \frac{60 \times 10^3 \times 142500}{31.96 \times 10^6 \times 10} = 26.75\ MPa$$

$$\tau_{بال} = \frac{60 \times 10^3 \times 142500}{31.96 \times 10^6 \times 150} = 1.78\ MPa$$