بسمه تعالی

جزوه فیزیک مکانیک
دانشکده فنی شهید رجایی
شهرستان لاهیجان

مدرس: سید علیرضا اقبالیان

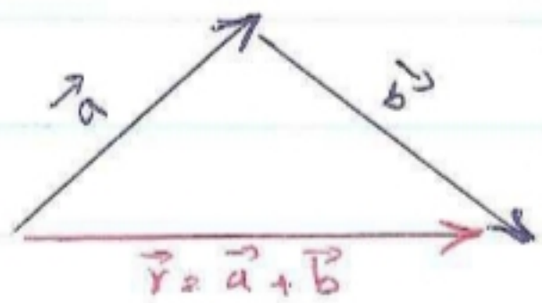
در صورت پرسش در ساعت
کلاس به شماره تلگرام زیر
پیام دهید:
۰۹۱۱۱۴۵۹۰۵۰

فصل اول: کمیتهای برداری
فصل دوم: حرکت مستقیم و ممتد
فصل سوم: حرکت پرتابی
فصل چهارم: قوانین نیوتن

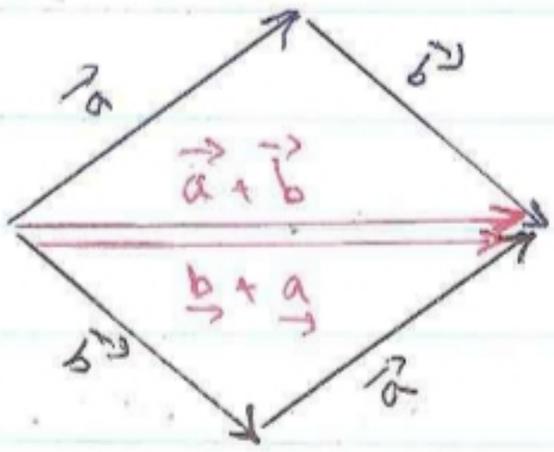
تعریف کمیت: هر چیزی که قابل اندازه گیری باشد و مقداری داشته باشد کمیت می گویند

۱- کمیتهای عددی یا نرده ای: این کمیتها فقط اندازه دارد و با یک عدد مشخص می شود
مانند: جرم - زمان
۲- کمیتهای برداری: این کمیتها علاوه بر کمیتهای نرده ای جهت را نیز دارند
مانند: سرعت - جابجایی - نیرو

جمع بردارها به روش هندسی:
۱- مثلثی: اگر دو بردار A و B داشته باشیم که دومی از انتهای اولی رسم شده است بردار برآیند یا جمع برداریست که ابتدای اولی را به انتهای دومی وصل می کند.

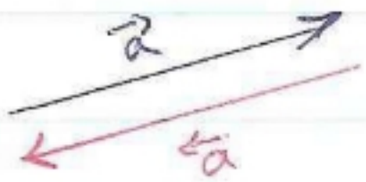


۲- متوازی الاضلاع: اگر دو بردار از یک نقطه باشند برای رسم بردار برآیند موازی اولی را از انتهای دومی و موازی دومی را از انتهای اولی رسم می کنیم که یک متوازی الاضلاع می سازد. در این متوازی الاضلاع می توان ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل کرد.

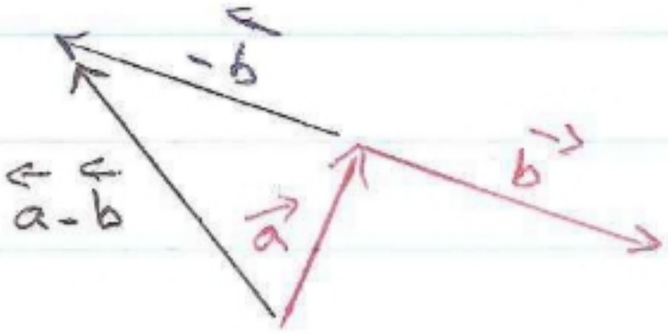


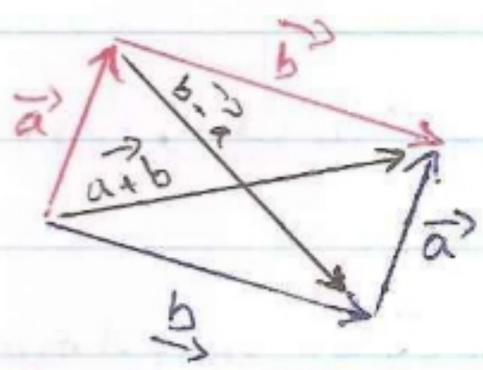
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

قرینه ی یک بردار: برداری است باهمان اندازه ولی در خلاف جهت

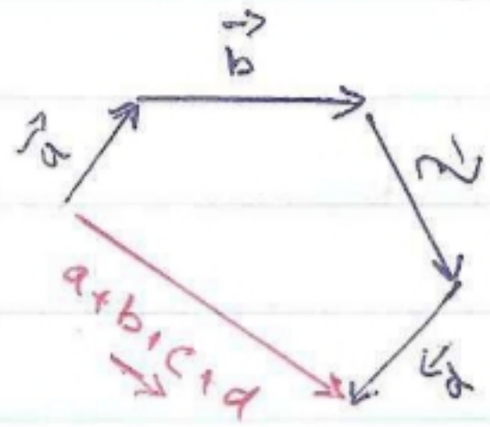


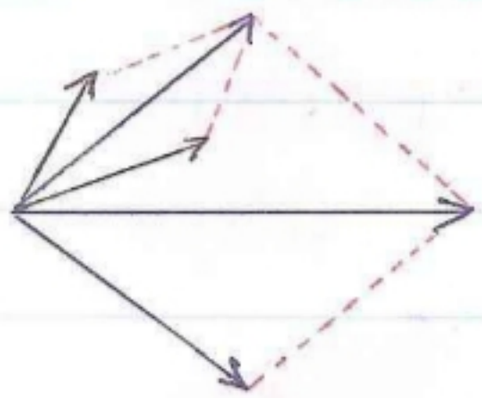
تفریق دوبردار: برای تفریق دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینه ی یکی را از انتهای دیگری رسم کنیم سپس جمع دوبردار a و $-b$ را با روش مثلثی رسم می کنیم.



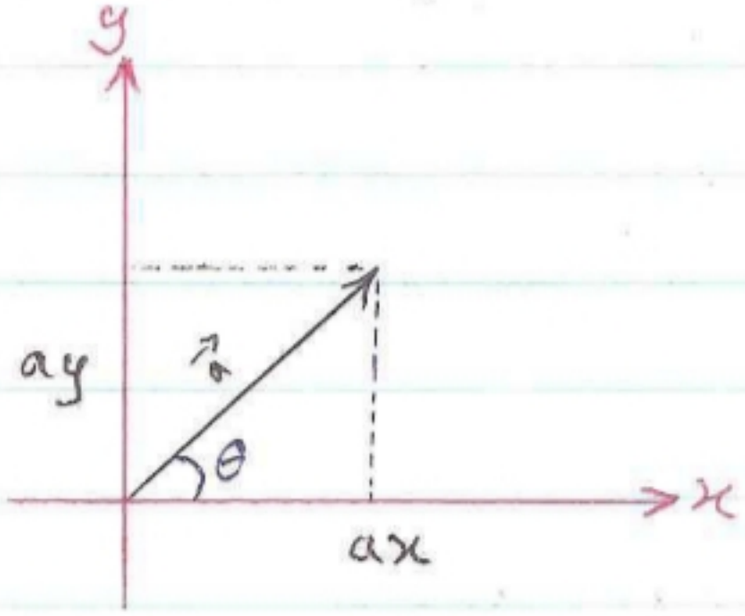


اگر چند بردار داشته باشیم که به ترتیب از انتهای هم وصل شده باشند جمع این چند بردار برداریست که ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کند





مؤلفه های یک بردار: اگر برداری مانند a را در صفحه x و y در نظر بگیریم. سایه ی این بردار در راستای x و y مؤلفه های این بردار نامیده می شود. که با ax و ay نشان داده می شود



$$\sin\theta = \frac{ay}{a} \Rightarrow ay = a\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{ax}{a} \Rightarrow ax = a\cos\theta$$

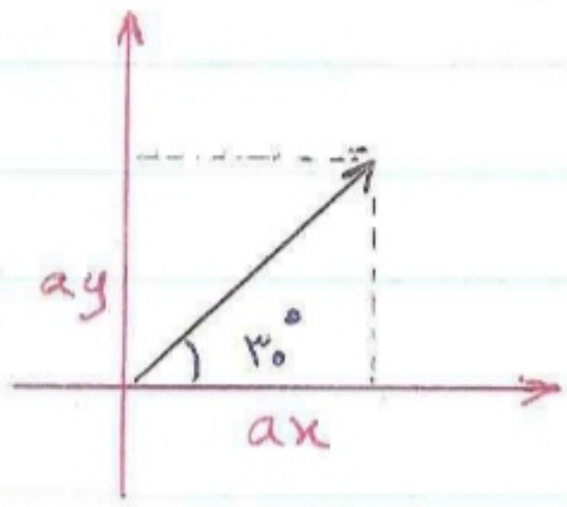
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{ay}{ax} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{ay}{ax}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{\tan}\left(\frac{ay}{ax}\right)$$

تمرین:

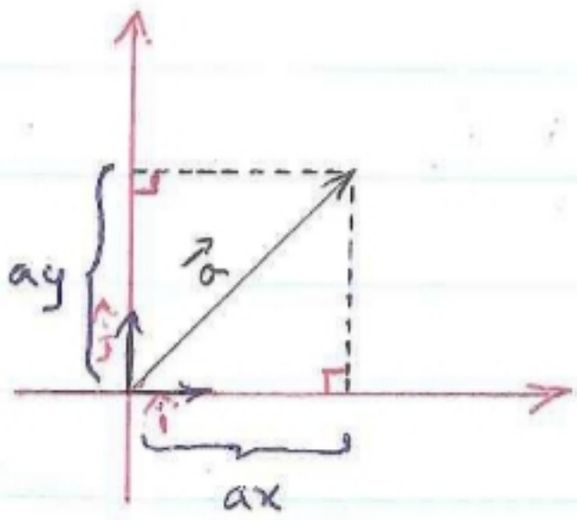
هواپیمایی مسافت ۱۰۰۰ متر را با زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به افق می‌پیماید. جابجایی این هواپیما را در راستای افق به‌دست آورید



$$ax = a\cos 30^\circ = 1000 \times 0/85 = 850\ m$$

$$ay = a\sin 30^\circ = 1000 \times 0/5 = 500\ m$$

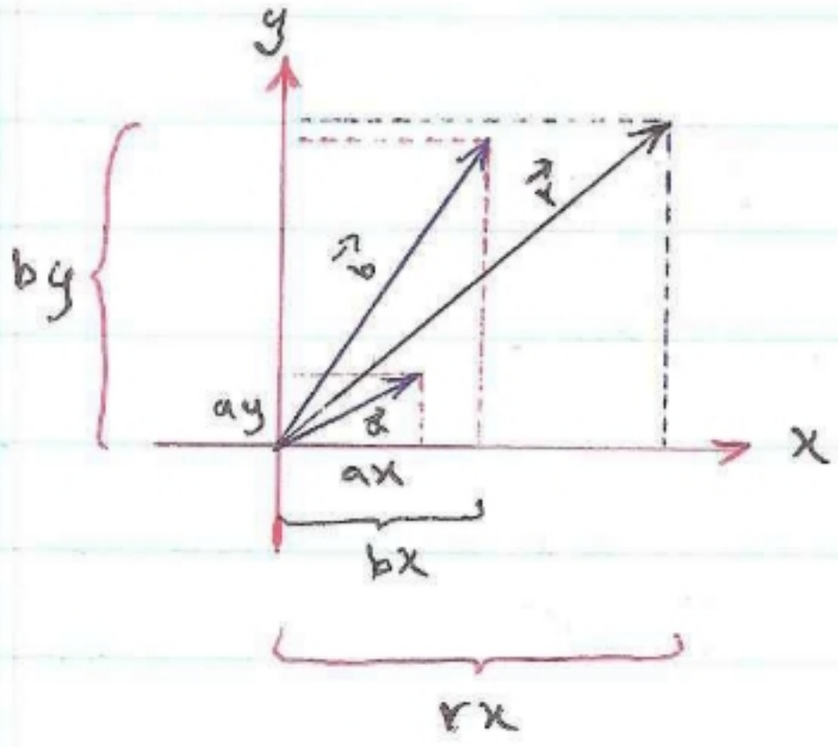
بردارهای یکه: هر برداری که اندازه‌ی واحد داشته باشد بردار یکه می‌نامند. اگر این بردار یکه در جهت محور x ها باشد آن را با نماد $\hat{i}$ نشان می‌دهند و اگر در جهت محور y ها باشد آن را با نماد $\hat{j}$ نشان می‌دهند.



$$a = ax\hat{i} + ay\hat{j}$$

$$a = a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}$$

جمع چند بردار با استفاده از روش مؤلفه‌ها:



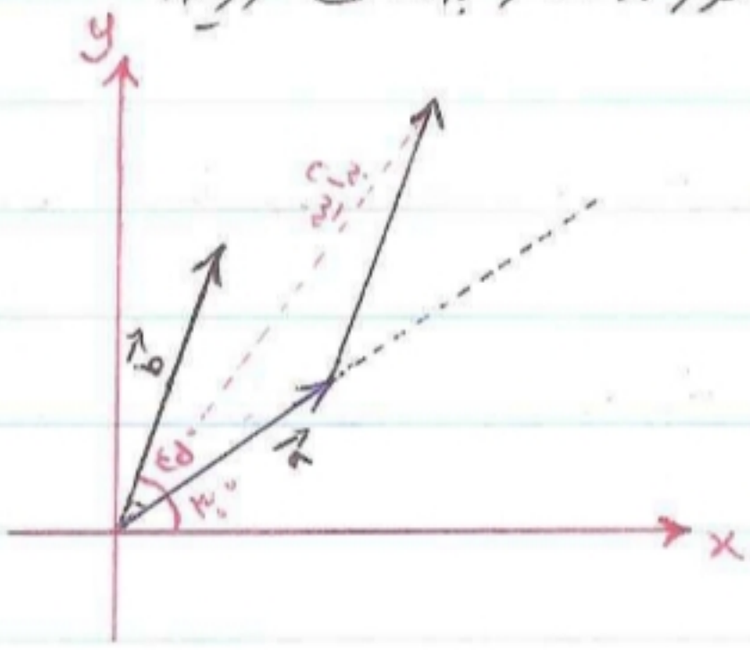
$$rx = ax + bx + cx + \dots$$

$$ry = ay + by + cy + \dots$$

در روش مؤلفه‌ها برای جمع چند بردار مؤلفه‌ی x بردار برآیند با جمع مؤلفه‌ی x تک تک بردارها به‌دست می‌آید و برای مؤلفه‌های دیگر می‌توان به همین صورت مؤلفه‌ی بردار برآیند را به‌دست آورد.

مسأله:

دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های مساوی ۱۰ متر مطابق شکل قرار گرفته‌اند. مؤلفه‌ی x و y بردار برآیند، اندازه‌ی بردار برآیند و جهت آن با محور x ها را بدست آورید.



مؤلفه‌های $\vec{a}$:

$a_x = a\cos 30^\circ = 10 \times 0/85 = 8/5$

$a_y = a\sin 30^\circ = 10 \times 0/5 = 5$

مؤلفه‌های $\vec{b}$:

$b_x = b\cos 45^\circ = 10 \times 0/7 = 7$

$b_y = b\sin 45^\circ = 10 \times 0/7 = 7$

مؤلفه‌های $\vec{r}$:

$r_x = a_x + b_x = 8/5 + 7 = 15/5$

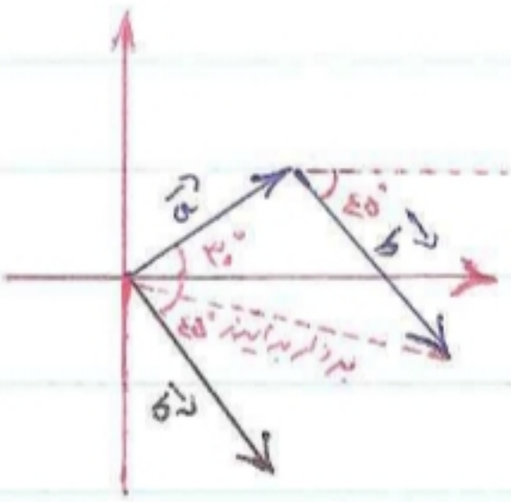
$r_y = a_y + b_y = 5 + 7 = 12$

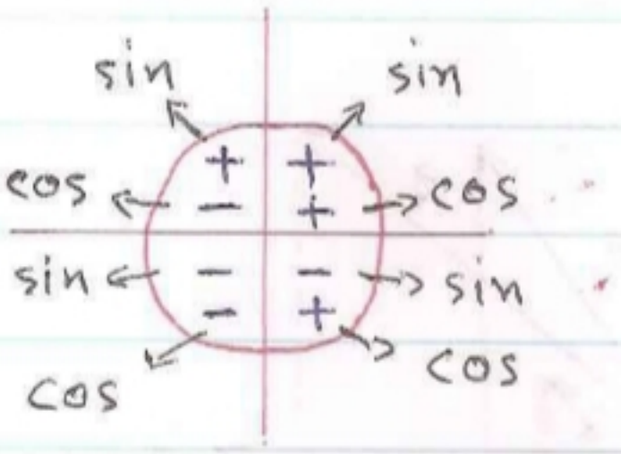
$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(15/5)^2 + (12)^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \arctan\left(\frac{12}{15/5}\right)$ زاویه بردار برآیند با محور x ها

مسأله:

بردار A با اندازه ۲ متر و بردار با اندازه‌ی همسته مطابق شکل قرار گرفته‌اند. مؤلفه‌ی x و y بردار برآیند، اندازه‌ی بردار، و زاویه‌ی آن با محور x ها را بدست آورید.





اگر زاویه نسبت به محور x ها پاد ساعت گرد (خلاف جهت ساعت) + در نظر گرفته می‌شود ساعت گرد باشد - در نظر می‌گیریم.

$\vec{a}$

$a_x = a\cos 30^\circ = 2 \times 0/85 = 1/7$

$a_y = a\sin 30^\circ = 2 \times 0/5 = 1$

$$\vec{b}\begin{cases} bx = b\cos(-\varepsilon\Delta^\circ) = \varepsilon \times 0/\gamma = \gamma/\lambda \\ by = b\sin(-\varepsilon\Delta^\circ) = \varepsilon \times (-0/\gamma\Delta) = -\gamma/\lambda \end{cases}$$

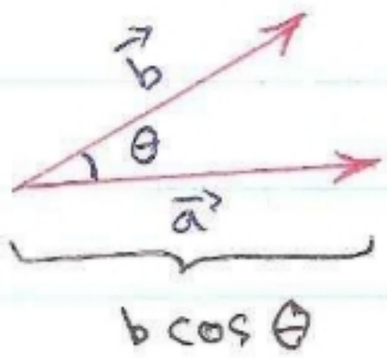
$$\vec{r}\begin{cases} rx = ax + bx = 1/\gamma + \gamma/\lambda = \varepsilon/\Delta \\ ry = ay + by = 1 - \gamma/\lambda = -1/\lambda \end{cases}$$

اندازه‌ی بردار برآیند $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(\varepsilon/\Delta)^2 + (-1/\lambda)^2}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{ry}{rx}\right) = \arctan\left(\frac{-1/\lambda}{\varepsilon/\Delta}\right)$$

ضرب داخلی ۲ بردار:

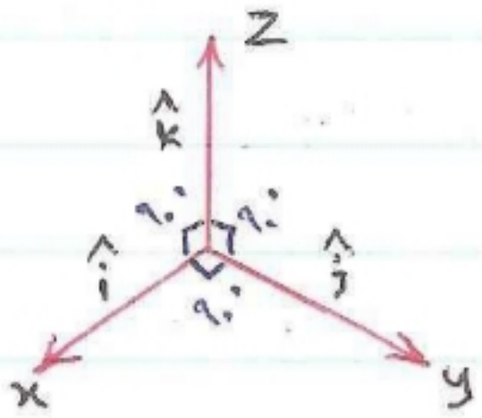
دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با زاویه‌ی θ بین آن‌ها را در نظر بگیرید. ضرب داخلی آن دو بردار یک کمیت نرده‌ای است.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

ضرب داخلی ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یعنی اندازه‌ی بردار a × سایه‌ی بردار $\vec{b}$ در جهت بردار $\vec{a}$

ضرب داخلی بردار یکه

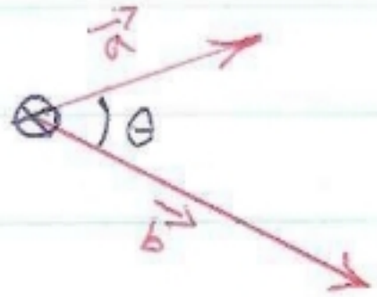


$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 1\times 1\times\cos 90 = 0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1\times 1\times\cos 0 = 1$$

اگر بردارهای یکه هم‌جنس باشند ضرب داخلی آن‌ها ۱ است و اگر هم‌جنس نباشند ضرب داخلی آن‌ها ۰ است.

بردارهای یکه ۲ به ۲ بر هم عمودند

ضرب خارجی ۲ بردار:

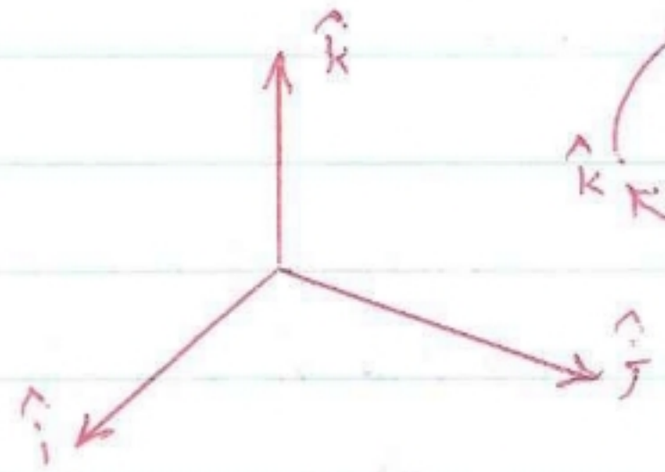


اندازه ضرب خارجی $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$

نتیجه‌ی ضرب خارجی ۲ بردار یک بردار خواهد بود که این بردار عمود بر ۲ بردار A و B می باشد.

اندازه ی ضرب خارجی با رابطه‌ی مقابل به دست می آید و جهت آن با قاعده ی دست راست مشخص می شود یعنی ۴ انگشت دست راست در جهت بردار اول قرار می گیرد و به سمت بردار دوم چرخانده می شود

انگشت شصت جهت بردار حاصلضرب را نشان می دهد



ضرب خارجی بردار یکه

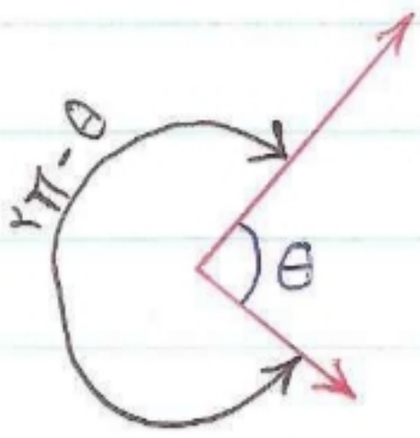
$|\hat{i}\times\hat{j}| = 1\times1\times\sin 90^\circ = 1$

$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i} = 0 = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k}$

برای ضرب خارجی بردارهای یکه دو بردار که هم جنس است نتیجه اش صفر است و برای بردار یکه ی که هم جنس نتیجه اش بردار یکه ی سوم است.

نکته: در ضرب خارجی ۲ بردار باید زاویه ی کوچک بین دو بردار را در نظر گرفت ولی در ضرب داخلی زاویه ی کوچک یا بزرگ بین دو بردار تأثیری در نتیجه‌ی ضرب ندارد



$\sin\theta = -\sin(2\pi-\theta)$

$\cos\theta = -\cos(2\pi-\theta)$

دو بردار $A=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ و $b=-3\hat{j}+\hat{k}$ را در نظر بگیرید، ضرب داخلی و خارجی دو بردار و زاویه بین ۲ بردار را پیدا کنید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})\cdot(-3\underline{\hat{i}\times\hat{i}}+2\underline{\hat{i}\times\hat{k}}+\underline{\hat{j}\cdot\hat{i}}-1\underline{\hat{j}\cdot\hat{k}})$$

$$-6\underline{\hat{k}\cdot\hat{i}}+2\underline{\hat{k}\cdot\hat{k}} = -6+2 = -4$$

ضرب داخلی ⇐

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})\times(-3\hat{i}+\hat{k}) = -6\hat{i}\times\hat{i}+2\hat{j}+3(-\hat{k})$$

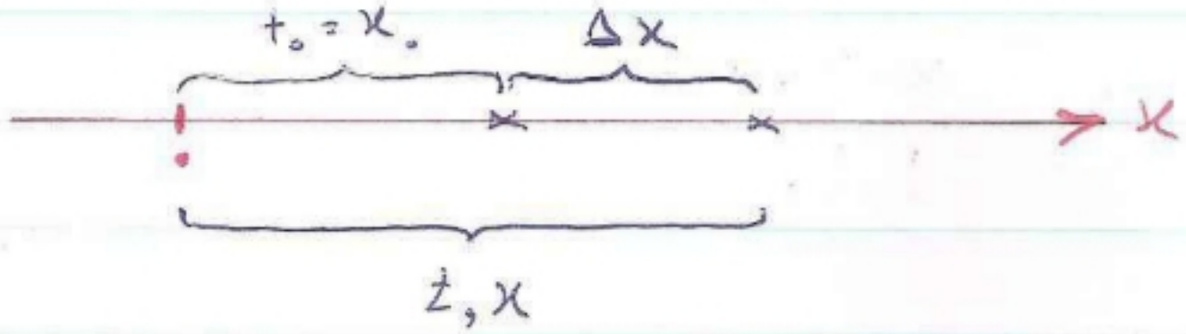
$$-\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}\times\hat{k} = -\hat{i}-4\hat{j}-3\hat{k}$$

ضرب خارجی ⇐

$$-4 = \left(\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+1^2}\right)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{3\sqrt{10}}$$

حرکت مستقیم الخط: حرکتی که روی یک خط راست صورت گیرد به آن حرکت مستقیم الخط می‌گویند

اگر یک جسم با گذشت زمان فاصله‌اش از مبدأ مختصات تغییر کند می‌گوییم جسم جابه‌جا شده است. این جابجایی را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم



جابجایی

$$\Delta x = x - x_0$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-x_0}{t-t_0}\ (m/s)$$

سرعت متوسط

سرعت متوسط یک جسم: برابر است با جابجایی جسم (Δx) به بازه‌ی زمانی (Δt) که و امر آن متر بر ثانیه است.

مسأله: قطاری با سرعت متوسط ۶۰ متر بر ثانیه به سمت شرق حرکت می‌کند. مدت ۶ ثانیه این قطار چه مقدار جابجایی دارد.

$\bar{V} = 60\ m/s \qquad \Delta t = 6(s) \qquad \Delta x = ?$

$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \bar{V} \times \Delta t \qquad \Delta x = 60 \times 6 = 360\ (m)$

مسأله: اتومبیلی در لحظه‌ی اولیه‌ی ۱۲ ثانیه و در فاصله‌ی ۵۰ متری و در لحظه‌ی ثانویه‌ی ۱۵ در فاصله‌ی ۵ متری از مبدأ قرار دارد. سرعت متوسط این اتومبیل را بدست آورید.

$t_0 = 12s \ , \ t = 15(s) \qquad x_0 = 50\ m \ , \ x = 5\ m$

$\bar{V} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{5 - 50}{15 - 12} = \frac{-45}{3} = -15\ m/s$

حرکت به سمت چپ

سرعت لحظه‌ای:

سرعتی که جسم در هر لحظه دارد سرعت لحظه‌ای می‌گویند.

در یک حرکت یکنواخت سرعت متوسط یک جسم با سرعت لحظه‌ای آن برابر است و می‌توان برای این حرکت رابطه‌ی مقابل را نوشت:

$v = \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0 = 0} v = \frac{x_1 - x_0}{t} \Rightarrow \boxed{x = vt + x_0}$

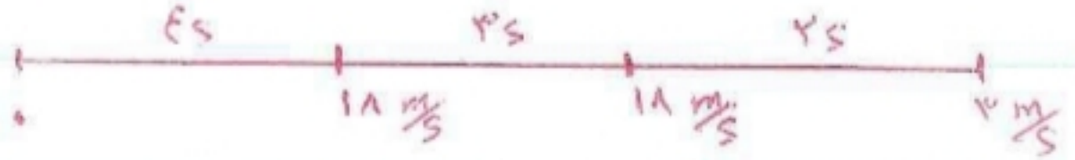
برای حرکت یکنواخت

شتاب متوسط:

اگر سرعت جسم یکنواخت نباشد یعنی با گذشت زمان سرعت تغییر کند می‌گوییم جسم دارای شتاب است و شتاب متوسط برای این جسم با رابطه‌ی مقابل تعریف می‌شود:

$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \ (m/s^2)$

مسأله: دوچرخه سواری از حالت ساکن شروع به حرکت می کند بعد از ۴ ثانیه به سرعت ۱۸ متر بر ثانیه می رسد و با همین سرعت ۳ ثانیه به حرکت خود ادامه می دهد و در نهایت ترمز می کند و در طی ۲ ثانیه سرعت خود را از ۱۸ متر بر ثانیه به ۳ متر بر ثانیه می رساند. شتاب متوسط این دوچرخه سوار را در هر مرحله از حرکت به دست آورید.



$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{۱۸ - ۰}{۴} = ۴,۵ \ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{۱۸ - ۱۸}{۳} = ۰$$

$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{۳ - ۱۸}{۲} = \frac{-۱۵}{۲} = -۷,۵ \ \frac{m}{s^2}$$

هرگاه سرعت و شتاب هم علامت باشند حرکت تند شونده است و هرگاه این دو کمیت هم علامت باشند یعنی یکی + و دیگری - باشد حرکت کند شونده است.

معادلات با حرکت شتاب ساده:

وقتی شتاب یک جسم با گذشت زمان همواره ثابت می ماند می توانیم شتاب لحظه ای را برابر با شتاب متوسط قرار دهیم و معادلات زیر را به دست آوریم

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0 = 0} a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow \boxed{v = at + v_0}$$

← لحظه ای

معادله سرعت نسبت به زمان برای حرکت با شتاب ثابت

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

معادله مکان نسبت به زمان برای حرکت با شتاب ثابت ≪

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

معادله مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت ≪

مسأله: اتومبیلی با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در حال حرکت است وقتی به ۲۴ متری یک مانع می رسد راننده ترمز می کند و اتومبیل پس از ۲ ثانیه به مانع می رسد.

الف) شتاب کند شونده ی اتومبیل را بدست آورید

ب) سرعت اتومبیل در لحظه ی رسیدن به مانع چقدر است.

$t=2(s)$ $\quad v_0=20\ m/s$ $\quad x=24\ m$ $\quad x_0=0$ $\quad a=?$

الف) $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times a\times(2)^2+20\times 2+0$

$24-40=2a \Rightarrow -16=2a$ $\quad \boxed{a=-8\ m/s^2}$

ب) $v=at+v_0=-8\times 2+20=-16+20=\boxed{+4\ m/s}$

مسأله: در لحظه ای که چراغ راهنمای سبز می شود اتومبیلی با شتاب ثابت ۲ متر بر مجذور ثانیه براه می افتد. در همان لحظه موتورسواری با سرعت ۸ متر بر ثانیه از کنار اتومبیل عبور می کند.

الف) اتومبیل در چه فاصله از چراغ راهنمایی به موتورسواری رسد؟

ب) سرعت اتومبیل در لحظه ی رسیدن به موتورسوار چقدر است؟

$x_1=v_1t+x_{0,1}=8t$

$x_2=\frac{1}{2}a_2t^2+v_{0,2}t+x_{0,2}=\frac{1}{2}\times 2\times t^2+0+0$

$x_1=x_2 \Rightarrow 8t=t^2$ $\quad t=8(s)$

الف) $x_1=8t=8\times 8=\underline{64(m)}$

ب) $v_2=a_2t+v_{0,2}=2\times 8+0=\underline{16\ m/s}$

مسأله: جسمی با سرعت ۲ متر بر ثانیه شروع به حرکت می کند و پس از طی مسافت ۱۰ متر به ۴ متر بر ثانیه می رسد. شتاب حرکت این جسم و زمانی که این جابجایی انجام شده است را بیابید.

$v_0 = 2\frac{m}{s}$ $\quad v = 4\frac{m}{s}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad x = 10(m)$ $\quad a = ?$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

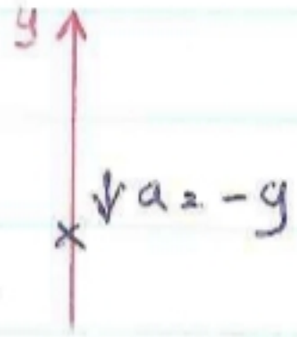
$$4^2 - 2^2 = 2 \times a(10 - 0) \Rightarrow 16 - 4 = 20a \Rightarrow a = \frac{12}{20}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 4 = \frac{12}{20} \times t + 2 \Rightarrow 4 - 2 = \frac{12}{20}t$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{12}{20}t \Rightarrow t = \frac{2 \times 20}{12}(s)$$

سقوط آزاد:

اگر جسمی را به سمت بالا یا به سمت پایین در راستای محور y ها پرتاب کنیم. این جسم با شتاب گرانشی زمین حرکت خواهد کرد. در این حرکت جهت مثبت محور x ها را به سمت بالا انتخاب می کنیم و شتاب گرانشی زمین را منفی می گیریم.



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \\ v = at + v_0 \end{cases} \xrightarrow{a = -g} \begin{cases} y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \\ v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \\ v = -gt + v_0 \end{cases}$$

انتخاب مبدأ مختصات برای محور y ها اختیاری است و تأثیری در نتیجه‌ی مسأله ندارد.

مسأله: سنگی از بام ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر بالاتر از سطح زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. پس از ۵ ثانیه سنگ به زمین برخورد می‌کند.

الف) سنگ با چه سرعتی پرتاب شده است

ب) حداکثر ارتفاعی که سنگ می‌تواند بالا رود چقدر است؟

ج) سنگ با چه سرعتی به سطح زمین برخورد می‌کند؟

$t = 5(s)$ $\quad v_0 = ?$ $\quad y_0 = 50(m)$ $\quad y = 0$ $\quad g = 10$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

الف)
$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 + v_0 \times 5 + 50$$
$$0 = -125 + 5v_0 + 50$$
$$0 = -75 + 5v_0 \qquad 75 = 5v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{75}{5} = \boxed{15 \left(\frac{m}{s}\right)}$$

ب) سرعت جسم در نقطه‌ی اوج همیشه ۰ است.

$v_{اوج} = 0$ $\quad y = ?$ $\quad y_0 = 50$

$$v_{اوج}^2 - v_0^2 = -2g(y_{اوج} - y_0) \Rightarrow 0 - 15^2 = 2 \times 10 \times (y_{اوج} - 50)$$

$$-225 = -20y - 50 \Rightarrow y - 50 = \frac{225}{20} = 11,25$$

$$y = 1,25 + 50 = \boxed{61,25}$$

ج) $v_{زمین} = -gt + v_0 = -10 \times 5 + 15 = -50 + 15 = \boxed{-25 \frac{m}{s}}$

جهت سرعت به سمت پایین

مسأله: توپی را با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. حداکثر ارتفاعی که توپ می‌تواند بالا رود چقدر است؟

ب) زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج و بازگشت آن به سمت زمین چقدر است؟

ج) سرعت توپ را وقتی به زمین می‌رسد حساب کنید.

الف)

$$v_{اوج}^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

$$0 - 16^2 = -2 \times 10 \times (y - 0) \Rightarrow -256 = -20(y) \Rightarrow y = \frac{256}{20} = 12,8$$

ب)

$$v_{اوج} = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10 \times t + 16 \Rightarrow 10t = 16 \Rightarrow t = \frac{16}{10} = 1,6(s)$$

$$t' = 2t = 3,2(s)$$

ج)

$$v_{زمین} = -gt' + v_0 = -10 \times 3,2 + 16 \quad v = -32 + 16 = -16$$

به سمت پایین

مثال: سنگی از ارتفاع ۱۲۰ متری سطح زمین رها می‌شود.
الف) چقدر می‌گذرد تا سنگ ۵۰ متر اول را طی کند
ب) و ۷۰ متر دوم را طی کند.

$y_0 = 120(m)$ $y = 70(m)$ $t = ?$ $v_0 = 0$

الف)

$$70 - 120 = -5t^2 \Rightarrow -50 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{50}{5} = 10$$

$$t = \sqrt{10} = 3,16(s)$$

ب)

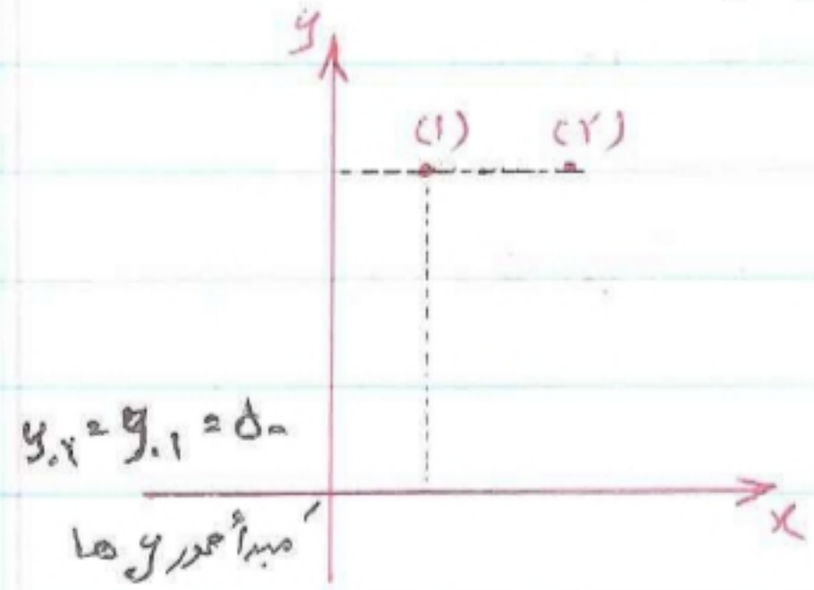
$$y' = -\frac{1}{2}gt'^2 + vt' + y_0'$$

$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t'^2 + 0 + 120 \Rightarrow 0 = -5t'^2 + 120$$

$$t'^2 = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow t' = \sqrt{24} \simeq 5$$

$$t'' = t' - t = 5 - 3,16 = 1,84(s)$$

مسأله: سنگی از ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین رها می‌شود. یک ثانیه بعد سنگی به سمت پایین پرتاب می‌شود. (از همان ارتفاع) این دو سنگ به سطح زمین می‌رسند سرعت اولیه سنگ دوم را حساب کنید.



$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,1}t + y_{0,1}$$

$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0 + 50 \Rightarrow 0 = -5t^2 + 50$$

$$t' = t - 1 = 3,16 - 1 = 2,16$$

$$5t^2 = 50 \Rightarrow t^2 = \frac{50}{5} = 10$$

$$t = \sqrt{10} \simeq 3,16$$ زمان

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt'^2 + v_{0,2}t' + y_{0,2} \qquad 0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times (2,16)^2 + v_{0,2} \times 2,16 + 50$$

$$\Rightarrow 0 = -23,32 + 2,16\, v_{0,2} + 50$$

$$\Rightarrow 0 = +26,68 + 2,16\, v_{0,2} \Rightarrow 2,16\, v_{0,2} = -26,68$$

$$\Rightarrow v_{0,2} = \frac{-26,68}{2,16} \Rightarrow v_{0,2} = -12,35$$

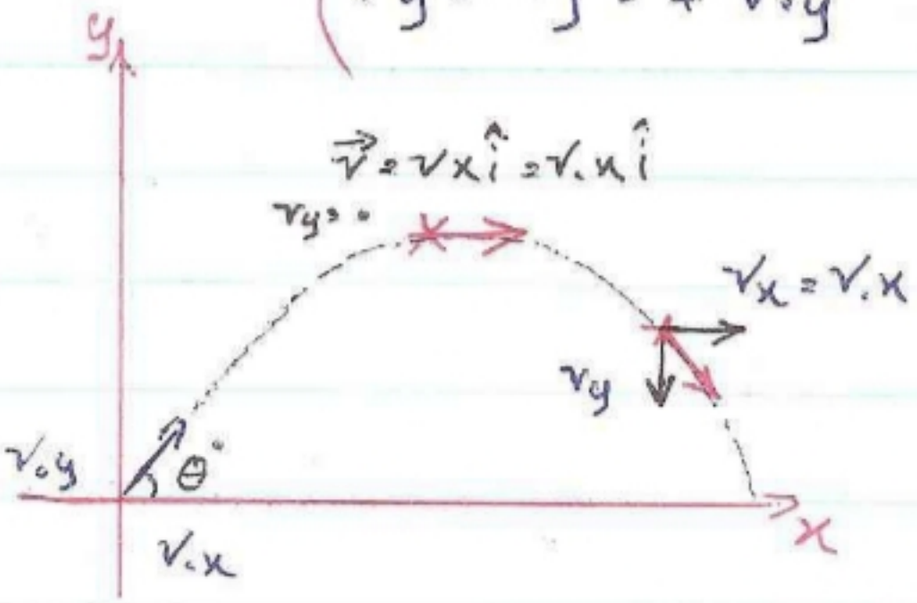
حرکت پرتابی:

در حرکت پرتابی جسمی را با سرعت اولیه‌ی v_0 که زاویه‌ی θ با محور xها می‌سازد پرتاب می‌شود. در این حرکت جسم در جهت محور xها هیچ نشانه‌ای ندارد و در این سمت حرکت یکنواخت را داریم

در جهت محور yها جسم با شتاب گرانشی زمین حرکت خواهد کرد یعنی حرکت سقوط آزاد را داریم و از همان معادلات سقوط آزاد می‌توانیم استفاده کنیم. در این معادلات باید انرژی v_0 را برای سرعت در جهت محور yها قرار بدهیم.

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \\ v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \\ v_y = -g t + v_{0y} \end{cases}$$

(برای اینکه حرکت یکنواخت است) $v_x = v_{0x}$



تجزیه بردار سرعت اولیه $\vec{v}_0$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

مسأله: سنگی را با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در جهت افق از روی پلی با ارتفاع ۳۰ متر تا سطح رودخانه پرتاب می‌کنیم.

الف) زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به سطح آب برسد چقدر است؟

ب) فاصله‌ی افقی نقطه‌ی پرتاب سنگ با نقطه‌ی برخورد آن به سطح آب چقدر است؟

ج) سرعت سنگ را در لحظه‌ی برخورد با سطح آب بدست آورید.

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 20 \times \underline{\cos} = 20 \ \frac{m}{s} \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = 20 \times \underline{\sin} = 0 \end{cases}$$

الف)

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow -30 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0 + 0$$

$$30 = 5 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{30}{5} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{6}\ (s)}$$

ب)

$$x = v_x t + x_0 = \boxed{20 \times \sqrt{6} + 0}$$

ج)

$v_x = v_{0x} = 20 \frac{m}{s}$ جهت سرعت به سمت پایین

$$v_y = -g t + v_{0y} = -10 \times \sqrt{6} + 0 = \boxed{-10\sqrt{6}}$$

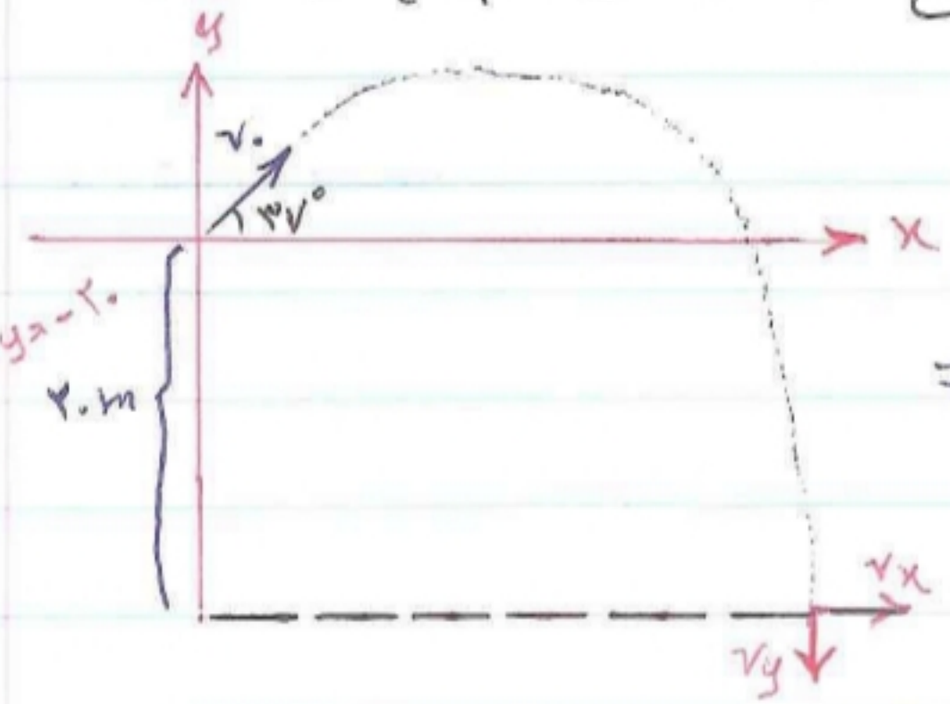
مسأله: جسمی با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه و زاویه‌ی 37° نسبت به افق از روی پلی به ارتفاع ۲۰ متر تا سطح رودخانه به سمت بالا پرتاب می‌شود

الف) سرعت نهایی جسم را هنگام برخورد با سطح آب به دست آورید.

ب) زمانی که طول می‌کشد تا جسم به سطح آب برسد چقدر است؟

ج) فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد جسم با سطح آب از نقطه پرتاب چقدر است؟

د) بردار افقی پرتابه را به دست آورید.



مؤلفه‌های $\vec{v}_0$:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 30 \times \frac{\cos 37}{0.8} = 24 \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = 30 \times \frac{\sin 37}{0.6} = 18 \frac{m}{s}$$

الف)

$$v_x = v_{0x} = 24 \frac{m}{s}$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow v_y^2 - 18^2 = -2 \times 10 \times (-20 - 0)$$

$$v_y^2 - 324 = 400 \Rightarrow v_y = \pm\sqrt{724} \simeq -27$$

چون به سمت پایین است منفی است.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{24^2 + 27^2}$$

ب)

$$v_y = -gt + v_{0y} \Rightarrow -27 = -10 \times t + 18$$

$$-27 - 18 = -10t \Rightarrow t = \frac{-45}{-10} = 4.5$$

ج)

$$x = v_{0x} t + x_0 = 24 \times 4.5 + 0 = 108 (m)$$

د)

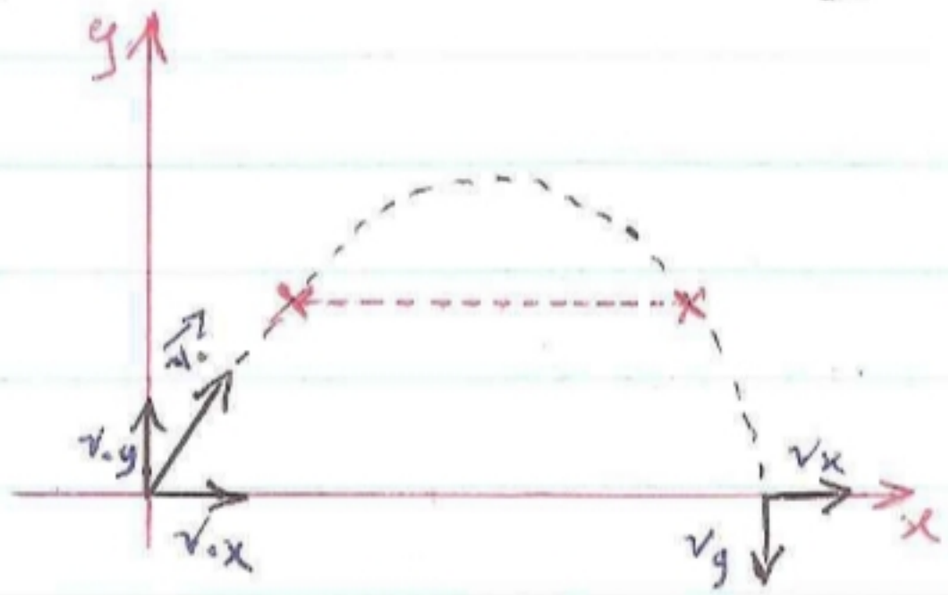
$$x = R = v_{0x} t' + x_0 = 24 x$$

$$v_y = -gt' + v_{0y} \Rightarrow -18 = -10 \times t' + 18 \Rightarrow$$

$$-10t' = -18 - 18 = -36 \qquad t = \frac{-36}{-10} = 3.6$$

$$(*) \Rightarrow x = R = 24 \times 3.6 + 0$$

نکته: در حرکت پرتابی فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب با نقطه‌ی هم‌سطح خودش روی محور x ها به عنوان برد پرتابه در نظر گرفته می‌شود. در حرکت پرتابی همیشه دو نقطه‌ی متقارن روی مسیر دارای سرعت‌های برابری هستند و تفاوت این دو نقطه فقط در جهت مؤلفه‌ی y سرعت است.



برای هر دو نقطه‌ی متقارن روی مسیر:

$$v_y = -v_{0y}$$
$$v_x = v_{0x}$$

نکته: مؤلفه‌ی y سرعت در حرکت پرتابی تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی اوج به سمت بالا یعنی مثبت است و پس از عبور از نقطه‌ی اوج جهتش به سمت پایین و منفی است.

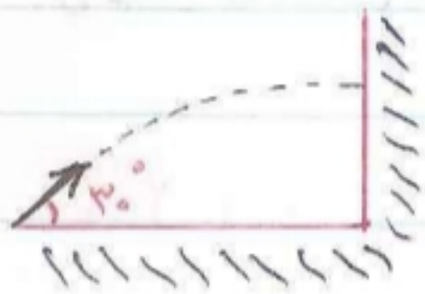
مسأله: توپی را با سرعت ۲۵ متر بر ثانیه به سمت بالا تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه به سمت دیواری پرتاب می‌کنم. فاصله‌ی این دیوار تا نقطه‌ی پرتاب ۲۲ متر است.

الف) زمان برخورد توپ با دیوار چقدر است؟

ب) توپ در چه فاصله‌ای بالاتر از نقطه‌ی پرتاب به دیوار برخورد می‌کند؟

ج) مؤلفه‌ی افقی و قائم سرعت توپ را در لحظه‌ی برخورد با دیوار مشخص کنید و تعیین کنید که در نقطه‌ی برخورد با دیوار توپ از نقطه‌ی اوج می‌گذرد یا خیر؟

$$\vec{v}_0 \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta = 25 \times \frac{\cos 30}{0/85} = 21,25 \left(\frac{m}{s}\right) \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta = 25 \times \frac{\sin 30}{0/5} = 12,5 \left(\frac{m}{s}\right) \end{cases}$$



الف) $x = v_{0x} t + x_0 \Rightarrow 22 = 21,25\, t \Rightarrow t = \frac{22}{21,25} \simeq 1$

ب) $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 1^2 + 12,5 \times 1 + 0$

$$\Rightarrow -5 + 12,5 = +7,5$$

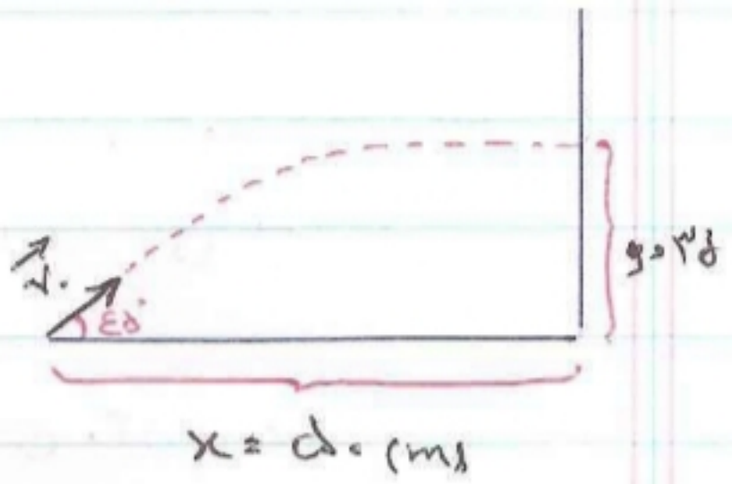
ج) $v_x = v_{0x} = 21,25 \frac{m}{s}$

به اوج نرسیده

$v_y = -gt + v_{0y} = -10 \times 1 + 12,5 = 2,5$

مسأله: تیری را به سوی دیواری در فاصله‌ی ۵۰ متری پرتاب می‌کنیم. سرعت اولیه‌ی تیر با جهت افق زاویه ۴۵° می‌سازد. نقطه‌ی برخورد تیر با دیوار ۳۵ متر بالاتر از سطح زمین است. اگر فرض کنیم که تیر از سطح زمین پرتاب شود زمان برخورد تیر با دیوار و سرعت اولیه‌ی آن چقدر است؟

$$\vec{v_0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = v_0 \times \cos 45^\circ = 0,7\, v_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta = v_0 \sin 45^\circ = 0,7\, v_0 \end{cases}$$



$x = v_{0x} t + x_0 \Rightarrow 50 = 0,7 v_0 t + 0$

$v_0 t = \frac{50}{0,7}$ | $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow 35 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0,7 v t + 0$ (۲)

(۱) $\Rightarrow$ (۲) $\Rightarrow 35 = -5t^2 + 0,7 \times \frac{50}{0,7} + 0$

$35 = -5t^2 + 50 \Rightarrow 35 - 50 = -5t^2$

$-15 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{15}{5} = 3$

$t = \sqrt{2} = 1,7\ (s)$

مسأله: سنگی با سرعت ۲۰۰ متر بر ثانیه تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه رو به بالای افق پرتاب می‌شود. فاصله‌ی افقی نقطه‌ی پرتاب و محل برخورد افقی آن با زمین ۷۰۰ متر است.

الف) چه مدت طول می‌کشد تا زمین برسد.

ب) سنگ از چه ارتفاعی پرتاب شده است؟

$x_0 = 0$, $y_0 = ?$, $y = 0$, $x = 700\ (m)$

الف) $x = v_{0x} t + x_0$ ①

$$v_0 \begin{cases} v_{0x} = \underbrace{v_0 \cos(-30^\circ)}_{+\cos 30^\circ} = 200 \times 0/86 = 170\ (\frac{m}{s}) \\ v_{0y} = \underbrace{v_0 \sin(-30^\circ)}_{-\sin 30^\circ} = 200 \times (-0/5) = -100\ (\frac{m}{s}) \end{cases}$$

① $700 = 170\, t + 0 \Rightarrow \quad t = \frac{700}{170} = 4/1\ (s)$

ب) $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (4/1)^2 + (-100 \times 4/1) + y_0$

$\Rightarrow 0 = -5(16/81) - 410 + y_0 \Rightarrow$

سرعت در سطح زمین با رابطه ی مقابل به دست می آید .

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = 170\ (\frac{m}{s}) \\ v_y = -gt + v_{0y} = -10 \times 4/1 + (-100) = -141\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

قوانین نیوتون

نیرو: کشش یا رانشی که به یک جسم وارد می شود و باعث تغییر حالت حرکت آن می شود نیرو می نامند.

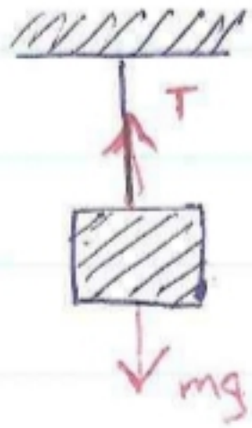
قانون اول نیوتون: اگر به آینه نیروهای وارد بر یک جسم $\vec{0}$ باشد جسم حالت ساکن یا حرکت با بت سرعت خود را روی خط مستقیم حفظ می کند.

$$\underbrace{\sum \vec{F} = 0}_{\text{جمع کل نیروها}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

وزن: نیروی که از طرف زمین به اجسام روی آن وارد می شود و شتاب گرانشی g را به این اجسام می دهد نیروی وزن می گویند.

$W = mg$ ⇐ (وزن)

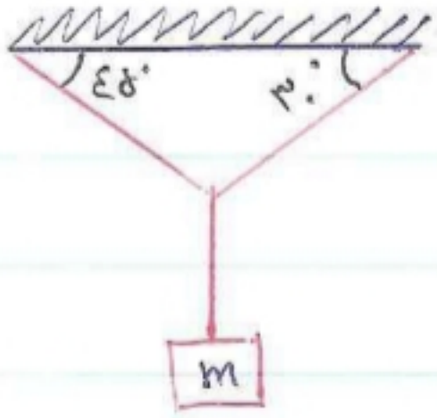
نیروی کشش ریسمان: نیرویی که از طرف یک ریسمان به یک جسم وارد می‌شود کشش ریسمان می‌نامند.

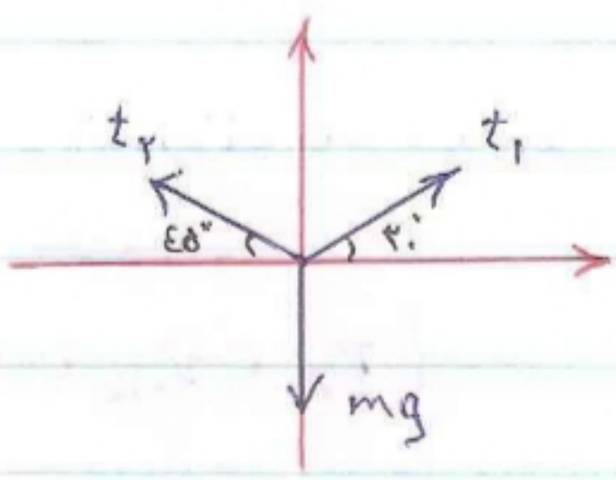


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T - mg = 0$$

$$T = mg$$

مسأله: جسمی با جرم ۱۰ کیلوگرم به طنابی وصل است و این طناب توسط یک گره به دو طناب دیگر متصل می‌شود. کشش هر طناب را بدست آورید.





$$\begin{cases} \Sigma f_x = 0 \Rightarrow \underbrace{t_1 \cos 30^\circ}_{0.85\,t_1} - \underbrace{t_2 \cos 65^\circ}_{0.7\,t_2} = 0 \\ \Sigma f_y = 0 \Rightarrow \underbrace{t_1 \sin 30^\circ}_{0.5\,t_1} + \underbrace{t_2 \sin 65^\circ}_{0.9\,t_2} - \underbrace{mg}_{10\times 10} = 0 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} 0.85\,t_1 - 0.7\,t_2 = 0 \\ 0.5\,t_1 + 0.9\,t_2 = 100 \end{cases}$$

$$(1.35)\,t_1 + 0 = 100 \Rightarrow t_1 = \frac{100}{1.35}\ (N)$$

$$0.85 \times \frac{100}{1.35} - 0.7\,t_2 = 0$$

$$\frac{85}{1.35} = 0.7\,t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{85}{1.35 \times 0.7}$$

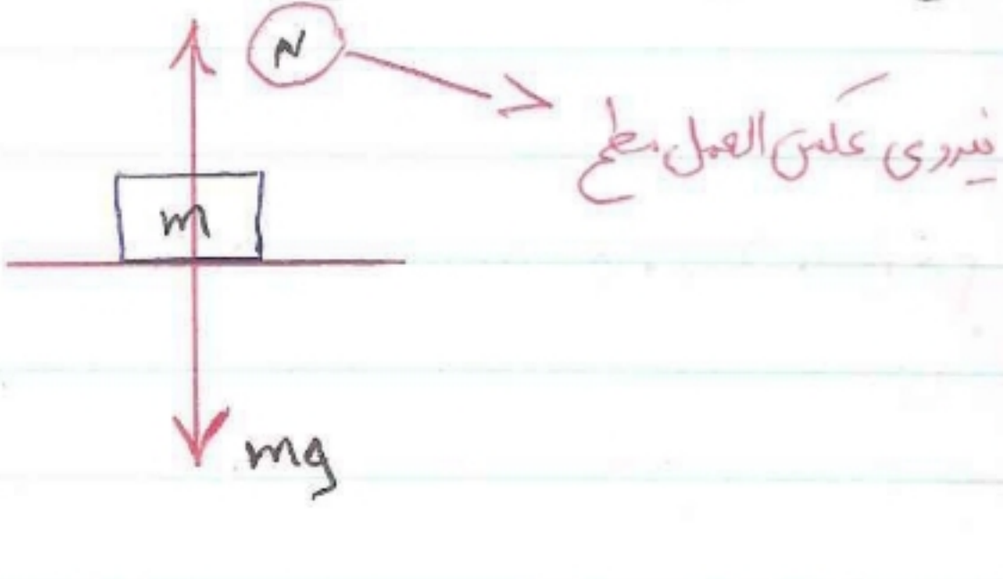
قانون دوم نیوتون: اگر برایند نیروهای وارد بر یک جسم ≠ ۰ نباشد این جسم با شتابی حرکت خواهد کرد که شتاب جسم با نیروی برایند رابطه‌ی مستقیم و با جرم جسم رابطه‌ی عکس دارد.

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m\,a_x \\ \sum F_y = m\,a_y \end{cases}$$

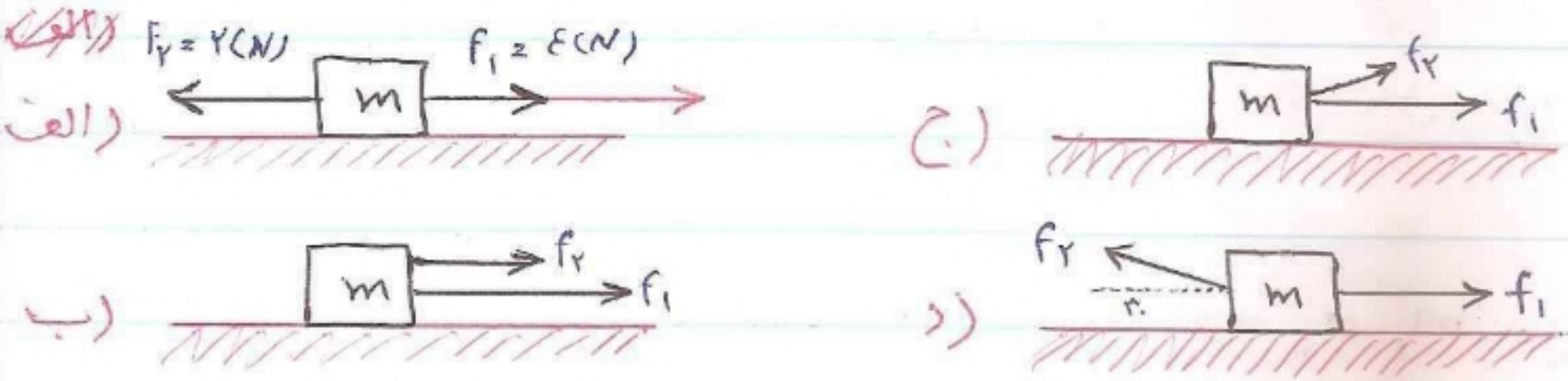
$\sum \vec{F}$: نیروی برآیند — m: جرم جسم — $\vec{a}$: شتاب جسم

قانون سوم نیوتون: طبق این قانون نیرویی که جسم اول به جسم دوم وارد می‌کند مساویست با نیرویی که جسم دوم به جسم اول وارد می‌کند.

نیروی عکس العمل سطح: نیرویی که از طرف یک سطح در برابر نیروی وارد به آن وارد می‌شود نیروی عکس العمل سطح می‌گوییم که همیشه به سطح تماس عمود است.



مسأله:



الف) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 - F_2 = ma_x$

$\varepsilon - 2 = 2a_x \Rightarrow 2 = 2a_x$

$a_x = \frac{2}{2} = 1 \ m/s^2$

ب) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 + F_2 = ma_x$

$\varepsilon + 2 = 2a_x \Rightarrow a_x = \frac{6}{2} = 3 \ m/s^2$

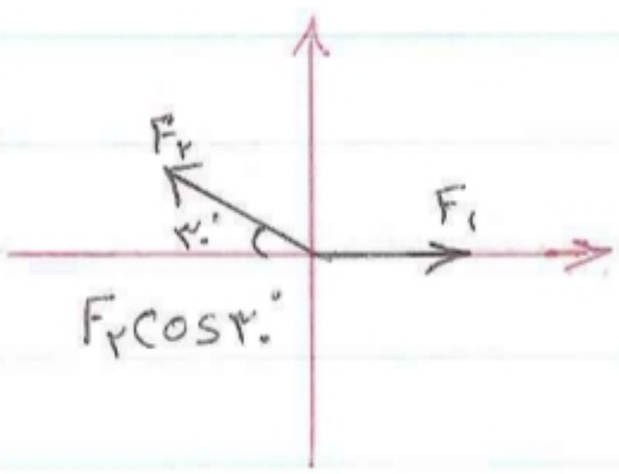
ج) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 + F_2 \cos 30^\circ = 2a_x$

$\varepsilon + (2 \times 0/85) = 2a_x \Rightarrow a_x = \frac{5,7}{2}$

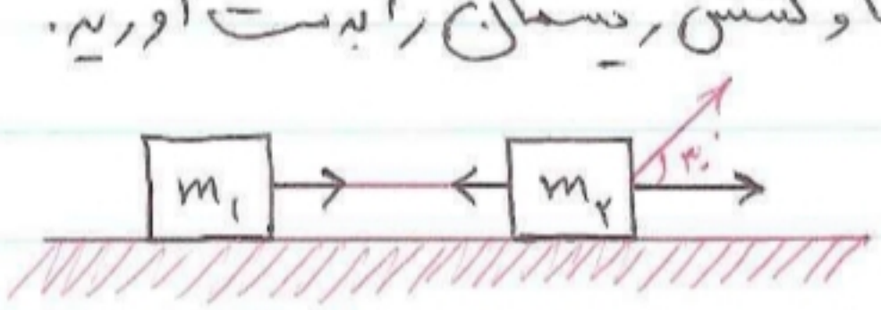
» $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 - F_2 \cos 30^\circ = ma_x$

$\varepsilon - 2 \times 0/85 = 2a_x \Rightarrow 2,3 = 2a_x$

$a_x = \frac{2,3}{2}$



مثال: دو جسم m_1 مساوی ۵ کیلوگرم و m_2 ۸ کیلوگرم توسط طناب بدون جرمی به هم متصل شده اند و نیروی ۱۰ نیوتن با زاویه ی ۳۰° نسبت به افق به جسم m_2 وارد می شود. شتاب حرکت جسم ها و کشش ریسمان را بدست آورید.



$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow F\cos 30^\circ - T + T = (m_1 + m_2) a_x$

(m: جمع کل دو جسم)

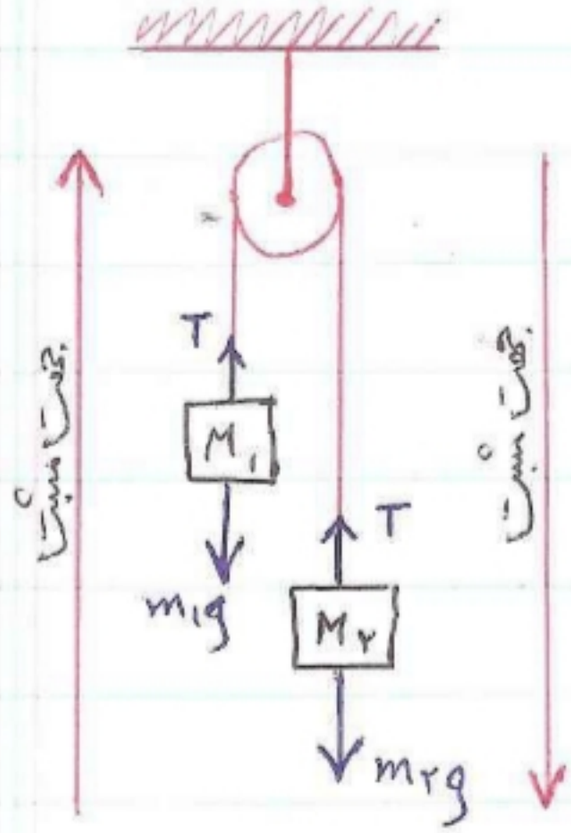
$10 \times 0/85 = (5 + 8) a_x \Rightarrow$

$a_x = \frac{8,5}{13} \ m/s^2$

$\Sigma F_{1x} = m_1 a_x \Rightarrow T = m_1 a_x = 5 \times \frac{8,5}{13}$

$$10 \times 0.85 - T = \frac{68}{13} \Rightarrow T = 1.5 - \frac{68}{13} = \frac{8.5 - 5.23}{3.26}$$

مسأله: دو جسم ۵ کیلوگرم $= M_1$ و ۸ کیلوگرم $= M_2$ توسط ریسمان بدون جرمی که از یک قرقره‌ی بدون اصطکاک عبور می‌کند به یکدیگر متصل شده‌اند. شتاب حرکت این دو جسم و کشش ریسمان را بدست آورید.



$\Sigma F_y = (M_1 + M_2)\, a_y$

(نیروهای وارد M_1 و M_2)

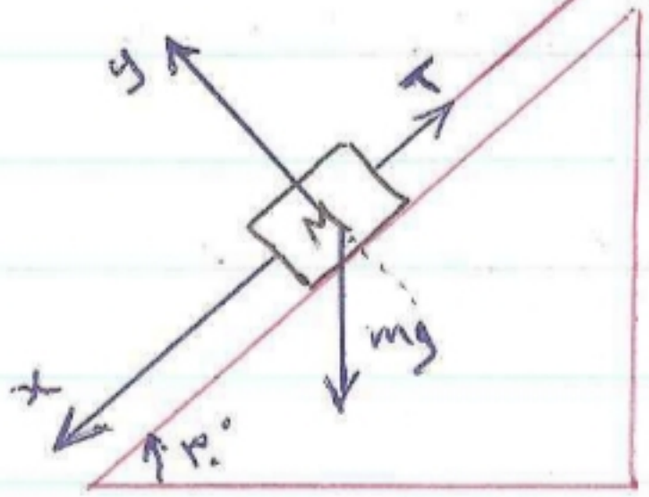
$$-M_1 g + T - T + M_2 y = (M_1 + M_2)\, a_y$$

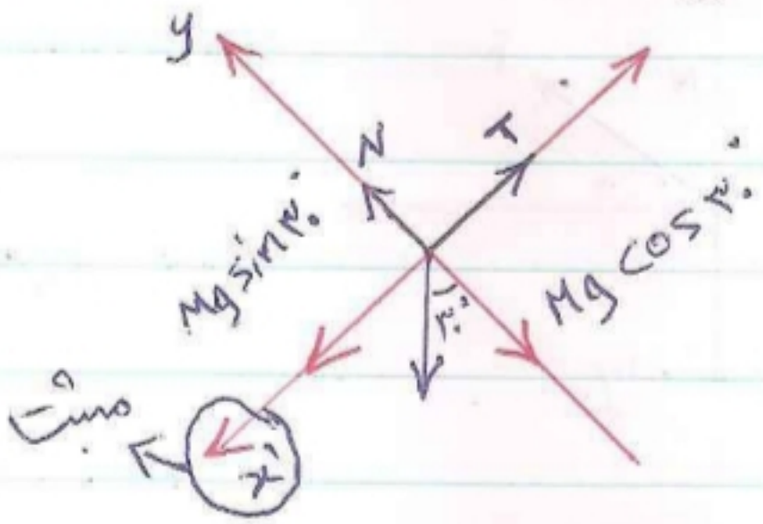
$$a_y = \frac{(M_2 - M_1)}{M_1 + M_2}\, g = \frac{(8-5)}{8+5} \times 10 \simeq 2.3 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\Sigma F_{1y} = M_1 a_y \Rightarrow -M_1 y + T = M_1 a_y$$

$$-5 \times 10 + T = 5 \times 2.3 \Rightarrow T = 11.5 + 50 \quad T = 61.5 (N)$$

مسأله: ریسمانی جسمی به جرم 10kg را روی یک سطح شیب‌دار نگه داشته است. و زاویه‌ی سطح شیب‌دار ۳۰ درجه می‌باشد. کشش ریسمان را بدست آورید.





$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow Mg \sin 30° - T = 0$$

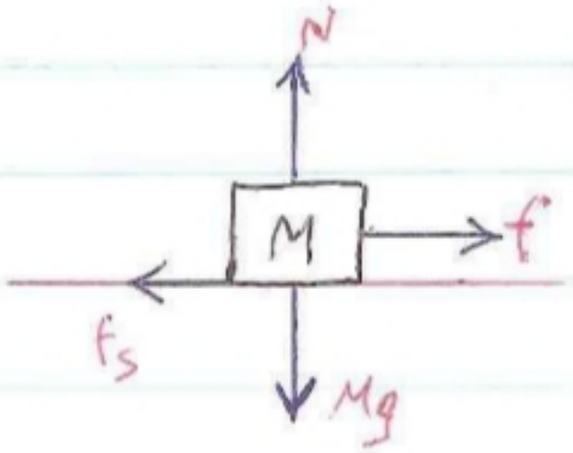
$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow N - Mg \cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = Mg \sin 30° = 10 \times 10 \times 0.5 = 50 \ (N) \\ N = Mg \cos 30° = 10 \times 10 \times 0.85 = 85 (N) \end{cases}$$

نکته: در مسأله حل شده عکس العمل سطح N نیز به دست آمد

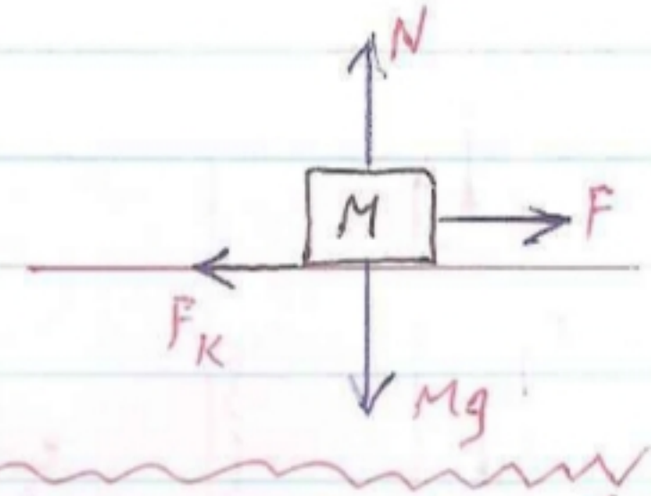
نیروی اصطکاک:

نیرویی که به یک جسم وارد می شود و مانع حرکت آن می شود نیروی اصطکاک می نامند اگر جسم در حال حرکت باشد اصطکاک وارد به آن جنبشی خواهد بود و اگر جسم ساکن باشد نیروی اصطکاک وارد به آن ایستایی خواهد بود.



$(f_s)_{max} = \mu_s N$

ضریب اصطکاک ایستایی

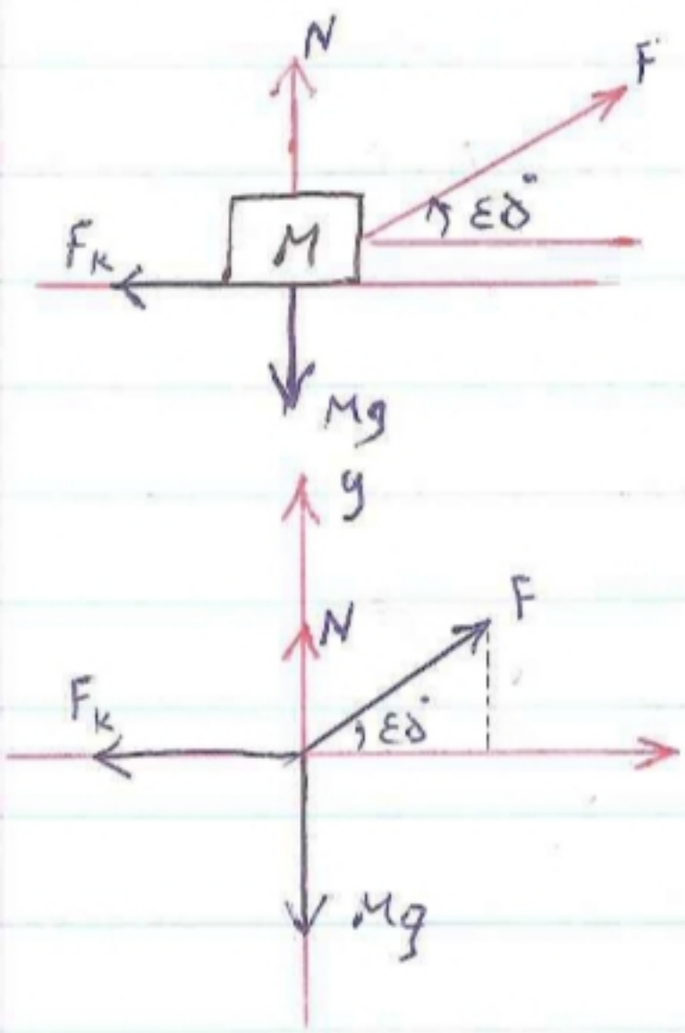


در حین حرکت $F_K = \mu_k N$

ضریب اصطکاک جنبشی

مسأله: جسمی با جرم 10kg توسط نیروی ۱۰ نیوتون که زاویه 45° با افق می سازد قرار دارد.

شتاب حرکت این جسم را بدست آورید.



$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F\sin 45^\circ - Mg = 0$

$N = Mg\, f \sin 45^\circ - 10 \times 10 - 10 \times 0/7$

$N = 93(N)$

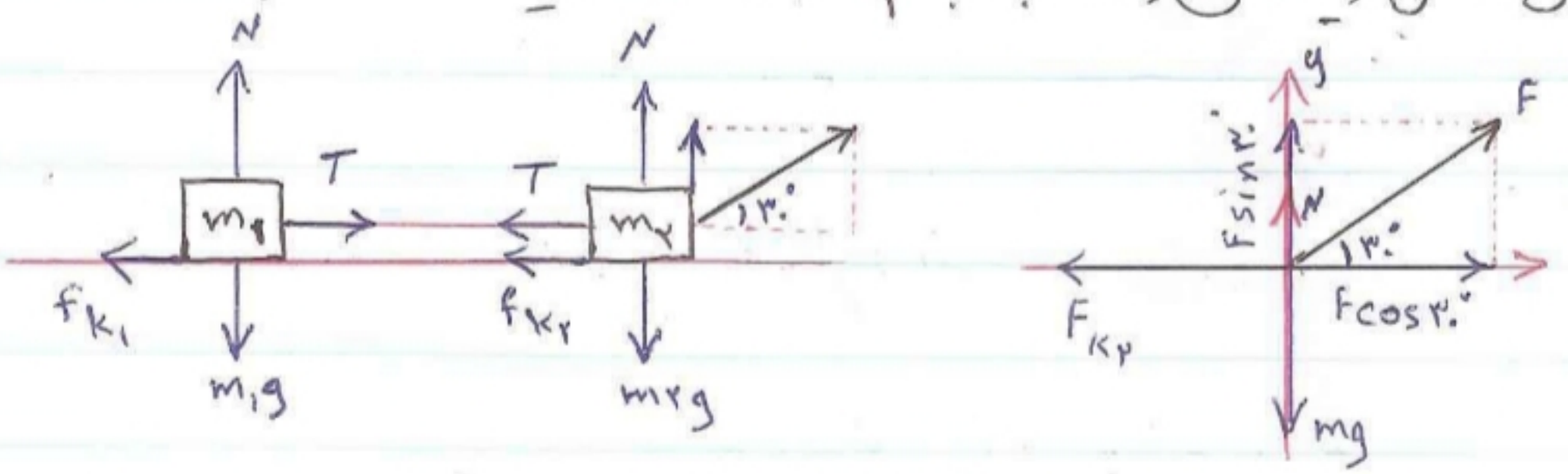
$F_k = \mu_k N = 0/1 \times 93 = 0/93(N)$

$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow F\cos 45^\circ - F_k = Ma_x$

$10 \times 0/7 - 0/93 = 0\, a_x \Rightarrow 7 - 0/93 = 10\, a_x$

$a_x = \frac{6/07}{10}$

مسأله: دو جسم $M_1=1kg$ و $M_2=2kg$ توسط ریسمان بدون جرمی به هم متصل شده اند و نیروی ۱۰ نیوتون به جسم M_2 وارد می شود. ضلع افقی که این ۲ جسم بر روی آن قرار دارند ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۲ دارد.
نیروی کشش ریسمان و شتاب جسم ها را بدست آورید.



$$\Sigma F_{1y}=0 \Rightarrow N'-m_1g=0 \longrightarrow N'=m_1g$$

$$F_{K_1}=\mu_k N'=0/2\times m_1g=0/2\times 1\times 10=2(N)$$

$$\Sigma F_{2y}=0 \Rightarrow N+F\sin 30^\circ-m_2g=0$$
$$N=m_2g-F\sin 30^\circ=2\times 10-10\times 0/5=15$$
$$\Rightarrow f_{k_2}=\mu_k N=0/2\times 15=3(N)$$

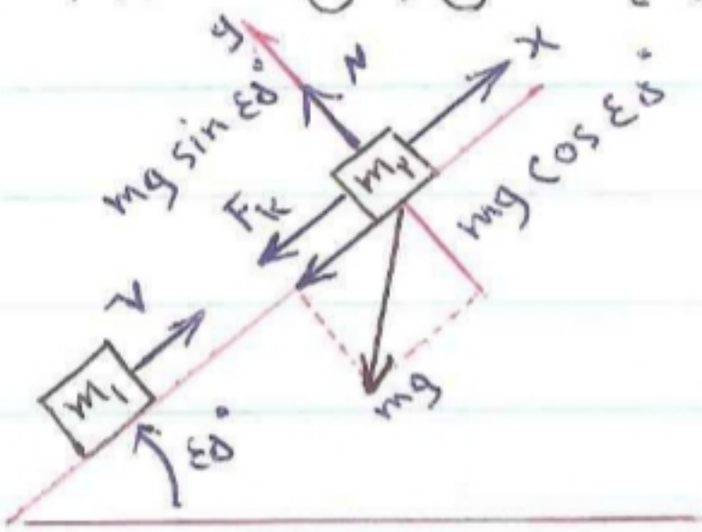
جسم‌هایی که وارد اثر می‌کنند m_1 و m_2

$$\Sigma F_x=(m_1+m_2)a_x \quad F\cos 30^\circ-T-f_{k_2}+T-f_{k_1}=(m_1+m_2)a_x$$
$$\Rightarrow 10\times 0/85-3-2=(1+2)a_x$$
$$\Rightarrow a_x=\frac{3/5}{3}\ m/s^2$$

$$\Sigma F_{1x}=m_1a_x \Rightarrow T-F_{K_1}=m_1a_x$$
$$T-2=1\times\frac{3/5}{3}$$
$$\Rightarrow T=\frac{3/5}{3}+2=\frac{9/5}{3}(N)$$

مسأله: جسمی به جرم 2kg روی سطح شیب داری با زاویه‌ی ۴۵ درجه قرار دارد. ضربه ای به این جسم وارد می شود و سرعت $4\ m/s$ را به جسم می دهد و جسم به

طرف بالای مطح شیب دار حرکت می کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و مطح شیب دار ۰/۲ است. بعد از اینکه جسم متوقف شود چه مسافتی را طی خواهد کرد؟

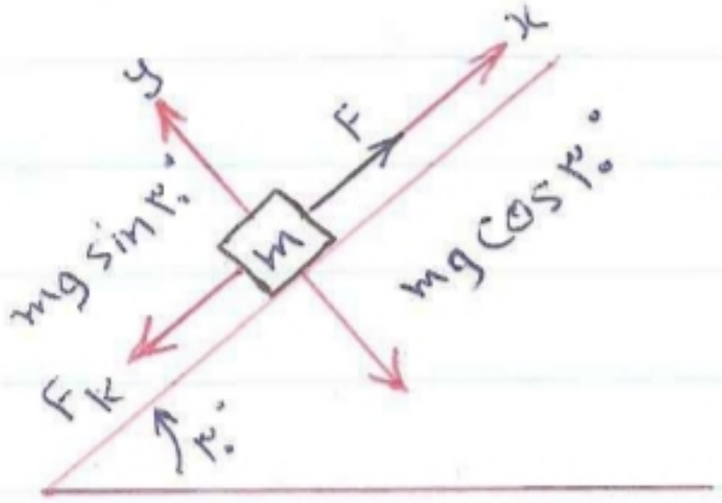


$$\Sigma F_x = m a_x$$
$$-F_K - mg \sin 45^\circ = m a_x$$

$$F_K = \mu_K N = \mu_K mg \cos 45^\circ = 0/2 \times 2 \times 10 \times 0/7$$
$$F_K = 2/8 \ (N)$$

$$-2/8 - 2 \times 10 \times 0/7 = 2 \times a_x$$
$$a_x = \frac{-16/8}{2} = -8/4 \ m/s^2$$

مسأله: جسمی به جرم ۱ کیلوگرم توسط نیروی ۲۰ نیوتن بر روی مطح شیب داری با زاویه‌ی ۳۰ درجه به سمت بالای مطح شیب دار کشیده می شود.
شتاب حرکت این جسم با فرض اینکه ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۴ باشد را حساب کنید.



$$\Sigma F_x = m a_x$$
$$F - F_k - mg \sin 30^\circ = m a_x$$

$$F_k = \mu_K N = \mu_K mg \cos 30^\circ$$

$$0/4 \times 1 \times 10 \times 0/85 = 3/4$$

$$20 - 3/4 - 1 \times 10 \times 0/5 = 1 \times a_x$$
$$1/4 = a_x$$