جزوه

SCOPIE

درس کنترل فرآیند

دکتر مجید رضائی آبادچی
دانشگاه علوم و تحقیقات

جلسه 1 :

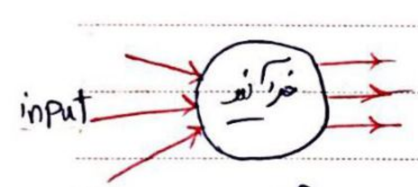
کنترل فرآیند (Process control)

برق مکانیک شیمی

فرآیندهای شیمیایی :

iso 9001 همه چیز رو فرآیند می بینه . T=60°C

سیستم مدیریت .



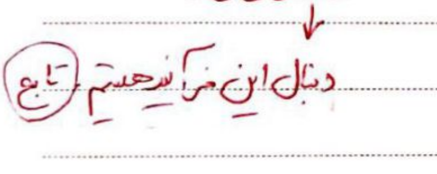
دنبال این فرآیند هستیم (تابع)

در کنترل فرآیند حالت پایا نیست unsteady state

$\frac{\delta}{\delta t}=0$ LL

در کنترل غیریکنواخت $\frac{\delta}{\delta t}\neq 0$

- فرض می کنیم یک مخزن پیش گرم کن داریم :



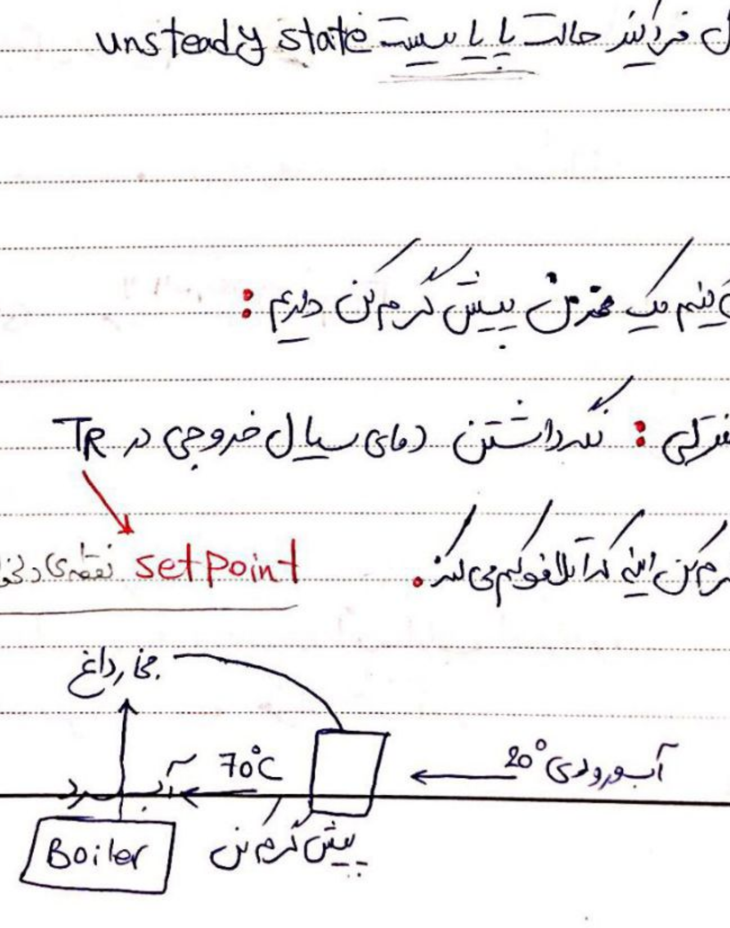
هدف کنترل : نگه داشتن دمای سیال خروجی در TR

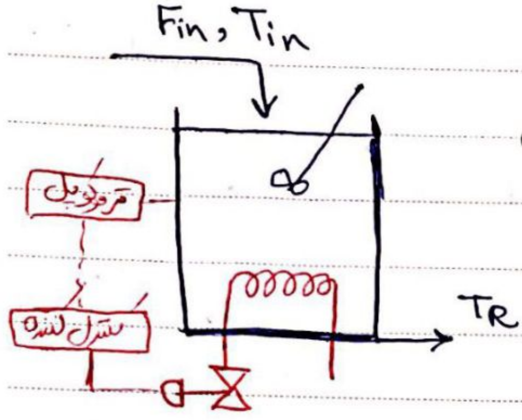
TR → set point نقطه ی دلخواه ما

کار پیش گرم کن اینه که دما رو تنظیم می کنه .

مخزن پیش گرم کن

* تعریف مخزن پیش گرم کن *





ورودی داریم با یک دمایی می‌خواهیم کنترل داشته باشیم روش

که خروجی بسته به اونی که می‌خواهیم.

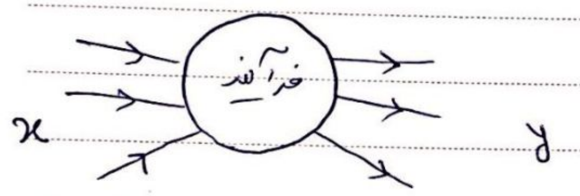
متغیر کنترل شونده: دما (T).

متغیر کنترل کننده: توان الکتریکی Heater _ دبی سیال ورودی.

input output

- چون دنبال دما هستیم موازنه‌ی انرژی می‌نویسیم

روی اون سیستم.



$y = f(x)$

- اگر دنبال جرم بودیم، موازنه‌ی جرم می‌نوشتیم.

② رابطه بین ورودی و خروجی ③

$\frac{\delta}{\delta t} \neq 0$ ① رابطه ← موازنه‌ی جرم یا انرژی ← معادله‌ی دیفرانسیلی ←

(چون شرایط ناپایاست)

حل معادلات با تبدیل لاپلاس. ④ ← $F(s)$ $\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}$ رابطه اصلی

مراجع:

* . دینامیک و کنترل فرآیندها ← دکتر فصیح‌زاده انتشارات امیرکبیر.
* . مبانی کنترل فرآیند در مهندسی شیمی ← منوچهر نیک‌آذر.

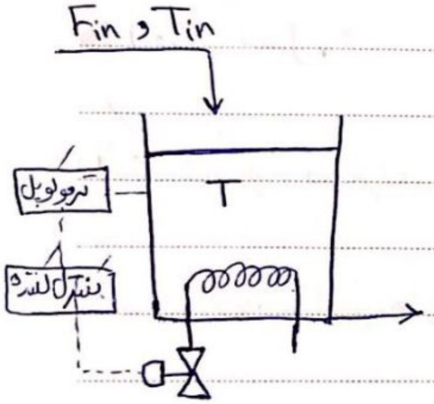
* ارزیابی: فعالیت کلاسی ۴   میان ترم ۶   پایان ترم ۱۰

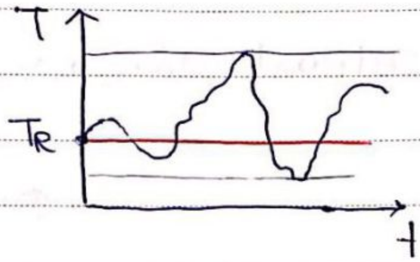
- حضور در کلاس - فعالیت در کلاس - تمرین و پروژه.

■ تعاریف و مقدمات:

- متغیر کنترل شونده (تأثیرپذیر).

- متغیر کنترل کننده (تأثیرگذار).





$\varepsilon = T - T_R$

خطا

ورودی های یک سیستم کنترلی (input) { ورودی قابل تنظیم → به کمک یک Valve یا تغییر Fin

ورودی غیرقابل تنظیم → دمای محیط

(اغتشاش) Disturbance

● کنترل فیدبک (Feed back): در این نوع کنترل متغیر تأثیرپذیر (کنترل شونده) اندازه گیری می شود و با توجه به انحراف آن از Set point (دلخواه ما) تصمیم کنترلی اتخاذ می شود.

● کنترل پیشخور (Feed forward): اگر بخواهیم با علت (متغیر تأثیرگذار) مقابله کنیم آنگاه باید متغیر کنترل کننده

(مثلاً دبی سیال ورودی) باید اندازه گیری و کنترل کنیم. مشکل داره فکر کنم!

Feed forward جایی خوب است که عوامل تأثیرگذار یکی باشد. کنترل دما از Feed Forward خوب نیست

اما مثلاً ارتفاع سیال نمی‌خواهیم کنترل کنیم چون فقط به دبی ورودی بستگی دارد می‌شود از Feed Forward استفاده کرد.

اهداف کنترل:

تأثیرپذیر

① نگه داشتن متغیر کنترل شونده روی مقدار Setpoint.

② حذف اغتشاش‌های ورودی.

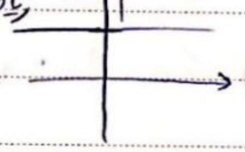
مروری بر تبدیلات لاپلاس:

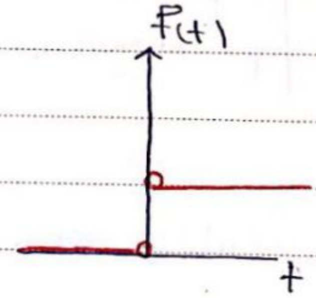
$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

کنترل فرآیند

$f(t) = 1$ $\quad U(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

ریاضیاتی





$$L\{1\} = \int_0^\infty 1\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \xrightarrow{L^{-1}} 1$$

Subject :
Date

$$f(t) = t \quad = \int_0^\infty \underbrace{t}_{u}\, \underbrace{e^{-st}\, dt}_{dv} = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt$$

روش انتگرال جزء به جزء. $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$ $\quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

$$\underbrace{-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty}_{0} + \overbrace{\frac{1}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, dt}_{1/s}}^{1/s^2} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \boxed{L\{t\} = \frac{1}{s^2}}$$

$$L\{e^{\pm at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$$

$$\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Rightarrow \frac{1}{a-s} \underbrace{e^{-(s-a)(\infty)}}_{0} = 0 - \frac{1}{a-s} \overbrace{e^{(a-s)(0)}}^{1} \Rightarrow -\frac{1}{a-s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s \mp a} \Longrightarrow L\{e^{\pm at}\} = \frac{1}{s \mp a}$$

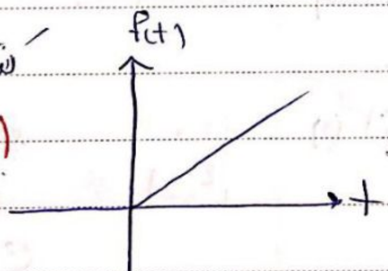
جلسه 2 :

$$\frac{\delta}{\delta t} \neq 0 \xrightarrow{\text{موازنه}} \text{معادله دیفرانسیلی} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} F(s) \xrightarrow{\ell^{-1}} \text{رابطه بین}$$

ورودی و خروجی.

کنترل خزانشی

$f(t) = t * u(t)$



Subject:
Date

$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\pm at} \times 1$	$\frac{1}{s \mp a}$
$e^{\pm at} f(t)$	$F(s \mp a)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

توان که دیدی t به توان می کمترشو حتما داری

$$t^n \longrightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(s-1)^3} \xrightarrow{L^{-1}} t^2 e^{t}$$

$$L\{e^{-t} t^3\} = \frac{6}{(s+1)^4}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$$e^{\omega i t} e^{-st}$$

$$e^{-(s-i\omega)t}$$

$$\frac{1}{s-i\omega} \times \frac{1}{s+i\omega} = \frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$f^{n}(t) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots$$

Subject:
Date

$$L\{e^{t}\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+9}\right\} = e^{-t}\cos 2t$$

$$\int_0^{\infty} \underbrace{f'(t)}_{dv}\, \underbrace{e^{-st}}_{u}\, dt = \underbrace{f(t)\,e^{-st}\Big|_0^{\infty}}_{-f(0)} - \underbrace{(-s)\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt}_{F(s)} =$$

$\downarrow$

$v = f(t)$

$$\boxed{sF(s) - f(0)}$$

حل معادلات دیفرانسیل :

مثال): معادله‌ی زیر را حل کنید .

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t} \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

$$s^2 x(s) - \cancel{s x(0)} - \cancel{x'(0)} + 2s x(s) - \cancel{2x(0)} - 3x(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$x(s)\left[s^2 + 2s - 3\right] = \frac{1}{s+1} \longrightarrow \boxed{x(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s-3)}}$$

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$$ اینو بلدیم ✓ اینو باید بشکنیم اگه بیم توی جدول

$$\xrightarrow{L^{-1}} \underbrace{Ae^{-t} + Be^{t} + Ce^{-3t}}$$ ✓ $\boxed{\text{بشکنی}}$ $\longleftarrow (s-1)(s+3)$

از روی گزینه ها می فهمیم .

Subject:
Date:

تشریحی :
$$\frac{A}{S+1}+\frac{B}{S-1}+\frac{C}{S+3}=\frac{1}{(S+1)(S-1)(S+3)}$$

ضرب طرفین در $(S+1)$:
$$A+\frac{B(S+1)}{S-1}+\frac{C(S+1)}{S+3}=\frac{1}{(S-1)(S+3)}$$

$\boxed{A=\frac{-1}{4}}$ ← $(S+1)$ طرفین ضرب در مخرج کسری که مورد تقسیم و هم اینجا

S را معادل مخرج = ۰ می‌گذاریم.

$S=-1$ چون

دیدیم که B و C صفر شوند

$\boxed{B=\frac{1}{8}} \longrightarrow S=1$

$\boxed{C=\frac{1}{8}} \longrightarrow S=-3$

$$x(t)=-\frac{e^{-t}}{4}+\frac{1}{8}e^{t}+\frac{1}{8}e^{-3t}$$

$$x''+2x'-3x=e^{-t}$$

از مشتق به بعد!

مثال:
$$\frac{1}{S(S+1)^3}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+1)^3}+\frac{C}{(S+1)^2}+\frac{D}{(S+1)}$$

توان بیشتر باشد (دو، سه و ...) هم می‌گیریم و می‌شکنیم.

$$\frac{1}{S(S+1)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+1)^2}+\frac{C}{(S+1)}$$

$$\to x(t)=A+Be^{-t}t^2+Ce^{-t}t+De^{-t}$$

$\times S$

$S=0 \longrightarrow A=1$

$\times (S+1)^3$

$S=-1 \longrightarrow B=-1$

$$\frac{1}{S}=\frac{A(S+1)^3}{S}+B+C(S+1)+D(S+1)^2$$

چون C و D برای این میزان اوردیم اگر

$S=-1$ بگذاریم دیگه جواب نمی‌دهد پس میایم از * مشتق میگیریم.

Subject:
Date

چون s+1 در صورت میمونه دیگه کاملا به صفر نمیره

$$-\frac{1}{s^2} = 3(s+1)^2 + 0 + C + 2D(s+1)$$

$C=-1$

مشتق برای D

$$s=-1 \quad \frac{-2}{s^3} = 0+0+0+2D \Rightarrow \xrightarrow{s=-1} D=1$$

مثال:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{a+bi}{s+i} + \frac{c+di}{s-i} = A + (a+bi)e^{-it} + (c+di)e^{it}$$

$k_1=0, k_2=1$

$i=\sqrt{-1} \qquad (s+i)(s-i)$

$i^2=-1 \qquad s^2-(i)^2$

$*s \longrightarrow A=1$

$s \to 0$

$*(s+i) \longrightarrow \frac{1}{s(s-i)} = a+bi$

$s=-i$

$\frac{1}{(-i)(-2i)} = a+bi \longrightarrow -\frac{1}{2} = a+bi$

$b=0$

$a=-\frac{1}{2}$

$*(s-i) \longrightarrow c+di \to c=-\frac{1}{2}$

$s=i$

حالت کلی:

$$x(s) = \frac{1}{(s+k_1+k_2 i)(s+k_1-k_2 i)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+1)} \to \begin{matrix} k_1=1 \\ k_2=0 \end{matrix} \quad \frac{A}{s+k_1+k_2} + \frac{B}{s+k_1-k_2 i} \xrightarrow{L^{-1}} x(t) = Ae^{-(k_1+k_2 i)t} + Be^{-(k_1-k_2 i)t}$$

$a+bi \qquad a-bi \qquad a+bi$

a

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Subject:
Date

جلسه 3 :

$$\xrightarrow{L^{-}} x(t)=(a+bi)\,e^{-(k_1+k_2 i)t}+(a-b i)\,e^{-(k_1-k_2 i)t}$$

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

$$(a+bi)\left[e^{-k_1 t}\,e^{-k_2 i t}\right]+(a-bi)\left[e^{-k_1 t}\,e^{+k_2 i t}\right]$$

$$a e^{-k_1 t} e^{-k_2 i t}+bi e^{-k_1 t} e^{-k_2 i t}+a e^{-k_1 t} e^{k_2 i t}-bi e^{-k_1 t} e^{k_2 i t}$$

$$a e^{-k_1 t}\underbrace{\left(e^{-k_2 i t}+e^{k_2 i t}\right)}_{2\cos k_2 t}+bi e^{-k_1 t}\underbrace{\left(e^{-k_2 i t}-e^{k_2 i t}\right)}_{-2i\sin k_2 t}$$

$$\begin{array}{ll} \cos k_2 t - i\sin k_2 t & \cancel{\cos k_2 t} - i\sin k_2 t \\ +\ \cos k_2 t + i\sin k_2 t & -\cancel{\cos k_2 t} - i\sin k_2 t \end{array}$$

(*)

$$\longrightarrow x(t)=2e^{-k_1 t}\left[a\cos k_2 t+b\sin k_2 t\right]$$

$$\frac{A}{s+k_1+k_2 i}+\frac{B}{s+k_1-k_2 i}$$

قسمت حقیقی را

قسمت موهومی را

آنالیز ریشه‌ها:

$$\frac{A}{s+0+0}+\frac{B}{s+0-0}=\overset{C}{\frac{A+B}{s}}$$

حالت ①: $k_1=0$ ، $k_2=0$

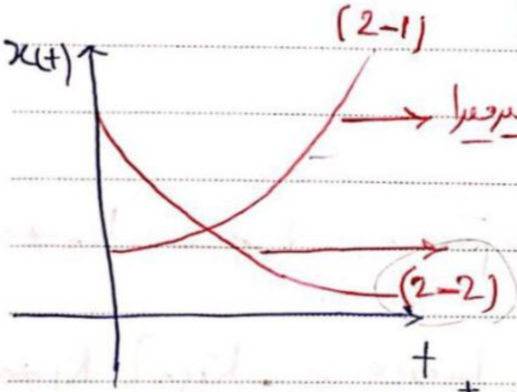
$$\frac{C}{s}\xrightarrow{L^{-1}}x(t)=C$$

حالت ②: $k_1\neq0$ ، $k_2=0$

$$\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+1}=\frac{2a}{s+1}=2ae^{-kt}$$

* $\rightarrow$ $x(t)=2ae^{-k_1t}$ $\begin{cases}2\text{-}1):\ k_1<0\\ 2\text{-}2):\ k_1>0\end{cases}$

?



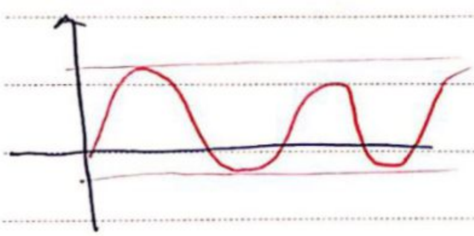
2-1): $x(t)=2ae^{-(-k_1)t}$ اگر $t\to\infty \Rightarrow x(t)\to\infty$

2-2): $x(t)=2ae^{-k_1t}$ اگر $t\to\infty \Rightarrow x(t)\to0$

حالت ③: $k_1=0$ ، $k_2\neq0$

(1) $\cancel{e^{-k_1t}}$ $\quad \frac{A}{s+k_2i}+\frac{B}{s-k_2i}$

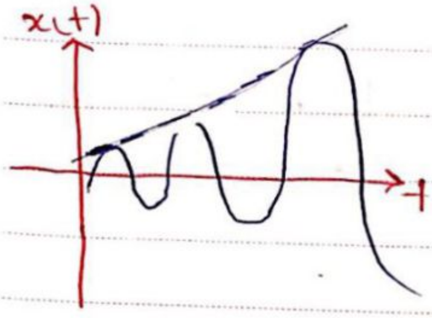
* $\rightarrow$ $x(t)=2(a\cos k_2t+b\sin k_2t)$ $\longrightarrow$ نوسانی دائم.



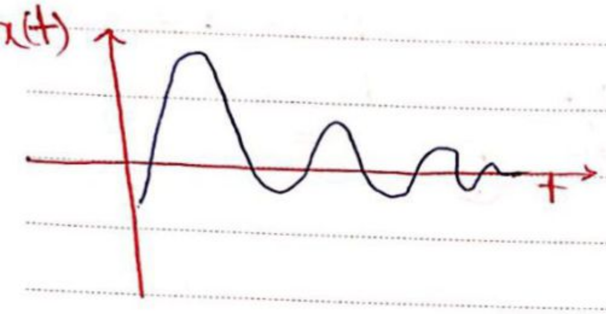
روی علامت k_2 بحثی نمی‌کنیم چون $\cos\theta=\cos(-\theta)$ و $\sin\theta=-\sin\theta$

Subject:
Date

حالت ④ : $k_1 \neq 0$
$k_2 \neq 0$



- $k_1 < 0$ حالت 4-1) : غیرمیرا



- $k_1 > 0$ حالت 4-2) : میرا

- $k_2 \neq 0 \longrightarrow$ پاسخ سیستم نوسانی است.

$k_1 \neq 0$:
- $k_1 < 0 \longrightarrow$ غیرمیرا
- $k_1 > 0 \longrightarrow$ میرا

* اگر k_1 و k_2 هر دو مخالف صفر باشند نوسانی میرا و نوسانی غیرمیرا داریم.

- رفتار پاسخ این سیستم پس از زمان طولانی چه شکل است؟

$$F(s) = \frac{1}{s(\underbrace{s^2+s+1})}$$

$\Delta = (1) - 4 = -3 \longrightarrow$ ریشه مختلط است.

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Subject:
Date

$$\frac{A}{S}+\frac{a+bi}{\left(S-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+\frac{a-bi}{\left(S-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$K_1 \quad K_2$

$K_1=\frac{-1}{2}$

$K_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

عدد ثابت + نوسانی غیرمیرا

$K_1<0$ ، $K_2\neq 0$

او علامت K_2 تحت فرض

$$\frac{1}{(S^2+2S-3)}=\frac{}{S+3}+\frac{}{S-1}$$

$K_1=3$ ، $K_1=-1$

$K_2=0$ ، $K_2=0$

میرا + غیرمیرا = غیرمیرا (چون میرا به جای صفر می‌شه غیرمیرا همچنان داره میره)

قضایای مهم تبدیل لاپلاس:

① قضیه‌ی مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{S\to 0} SF(S)$$

مثلاً اگر

$$\frac{1}{S(S^2+2S+1)}=F(S)$$

$$\longrightarrow \lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{S\to 0} S\left(\frac{1}{S(S^2+2S+1)}\right)=1$$

Subject :
Date

② قضیه‌ی مقدار اولیه:

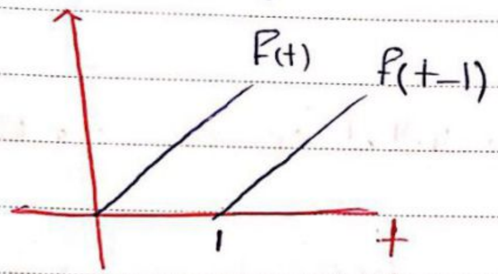
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

مثال اگر : $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+2s+1)}$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1}{s(s^2+2s+1)}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

③ قضیه‌ی تابع انتقال یافته:

$$L\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}\,F(s)$$



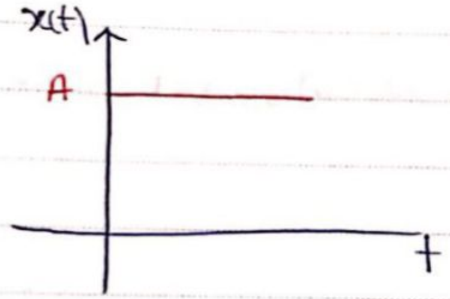
$$L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$

$e^{-t_0 s}\,F(s)$

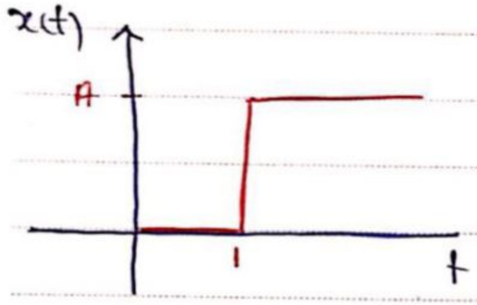
$$L\{e^{-(t-1)}\} = \frac{e^{-s}}{s+1}$$? ✓✓ $\longrightarrow e^{-s} \times \dfrac{1}{s+1}$

$$\frac{e^{-1s}}{s+1}$$

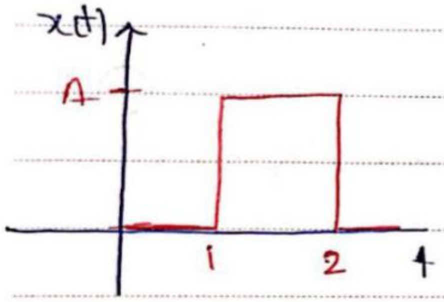
Subject:
Date



مثال۱: $x(t) = A\,u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{A}{s}$



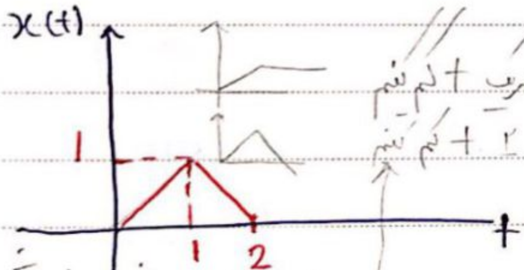
$x(t) = A\,u(t-1) \quad , \quad u(t)\begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$x(t) = A\,u(t-1) - A\,u(t-2) \quad , \quad u(t)\begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{L} X(s) = A\left[\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right]$

مثال۲:



اگر یک t کم کنیم

۲ t کم کنیم

?

* در لاپلاس نمی‌بینیمش

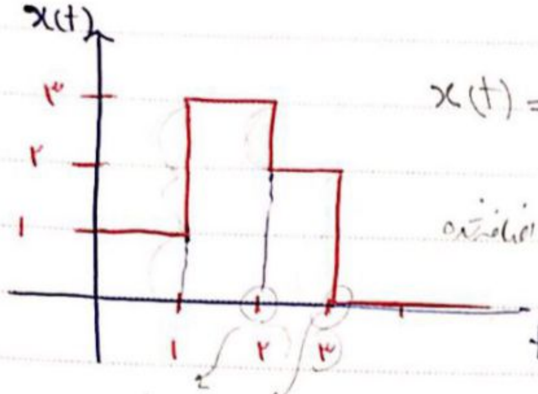
$x(t) = t\,u(t) - 2(t-1)\,u(t-1) + (t-2)\,u(t-2)$

شیب t با برشته t س

ضرب در 2

$\xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$

مثال): اگر ورودی استاندارد به شکل زیر باشد، ? = $X(s)$.



$$x(t) = u(t) + \underbrace{2u(t-1)}_{\downarrow} - u(t-2) - 2u(t-3)$$

از رفتن ۳ (مقدار $u(t)$) اضافه شده

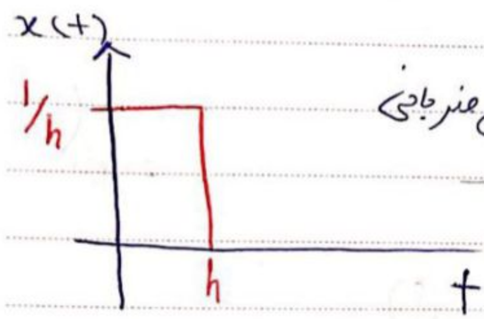
از $u(t-1)$

$t-2$ $t-3$

$$X(s) = \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

$$X(s) = \frac{1 + 2e^{-s} - e^{-2s} - 2e^{-3s}}{s}$$

مثال): اگر ورودی استاندارد به شکل زیر باشد، ? = $X(s)$.



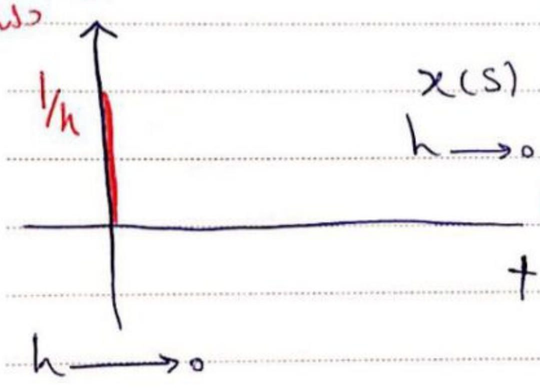
تابع ضربانی

$$x(t) = \frac{1}{h}u(t) - \frac{1}{h}u(t-h)$$

$$\xrightarrow{L} \boxed{X(s) = \frac{1}{hs} - \frac{e^{-hs}}{hs} = \frac{1-e^{-hs}}{hs}}$$

تبدیل لاپلاس تابع ضربانی.

تابع δ دلتا



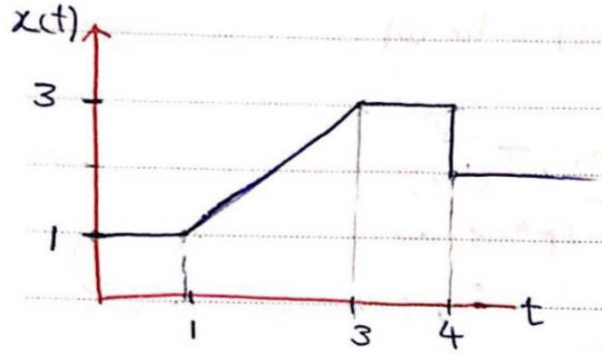
$$\underset{h \to 0}{X(s)} \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{H} X(s) = \frac{\cancel{h}e^{-hs}}{\cancel{h}} = 1$$

چون مبهم

$$\boxed{L\{\delta(t)\} = 1}$$ تابع ضربه‌ی آنی

Subject:
Date

جلسه ۴: روی کاغذ باید حل شن مثال‌ها،
ویس هم گوش کن.



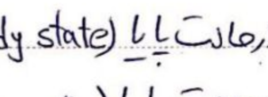
$$x(t)=u(t)+(t-1)u(t-1)-(t-3)u(t-3)-2u(t-4)$$

$$\longrightarrow X(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s t_0}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s^2}-\frac{2e^{-4s}}{s}$$

● سیستم‌های کنترلی:

■ اولین سیستم: دماسنج ساده

● سیستم‌های مرتبه اول



مثال ۱: دماسنج

T_∞ : دمای محیط ⟵ متغیر تاثیرگذار

T : دمای جیوه ⟵ متغیر تاثیرپذیر

$T_{\infty s}$: دمای محیط در حالت پایا (steady state) ⟵ دماسنج‌ها قبل از زمان صفر توی یک محیطی بوده

T_s : دمای جیوه در حالت پایا (" ")

انتقال حرارت از طریق جدار جامد به جیوه داره وارد می‌شود.

موازنه‌ی انرژی: $hA(T_\infty - T) = mC_p\frac{dT}{dt}$

چون مشتق درجه اول ⟵ سیستم مرتبه اول

ظرفیت گرمایی ویژه

$$\longrightarrow T_\infty - T = \frac{mC_p}{hA}\frac{dT}{dt} \longrightarrow \tau\frac{dT}{dt}+T=T_\infty$$

τ : ثابت زمانی

↓

τ دماسنج

معیاری از سرعت پاسخ‌گویی سیستم در واقع τ مدت زمانی است که سیستم به ٪63.2 مقدار نهایی می‌رسد.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \tau\,(sT(s) - T(t=0)) + T(s) = T_\infty(s)$$

دمای میوه در زمان صفر ← $T(t=0)$ رو نداریم ← کار مشکل میشه ← برای اینکه حذفش کنیم بیایم یه تغییر متغیری دهیم (برمی گردیم به محاسبات و یه تغییر جدید تعریف می کنیم.)

پس :

$$\left\{\begin{array}{l} hA(T_\infty - T) = mC_p \dfrac{dT}{dt} \\ hA(T_{\infty s} - T_s) = 0 \end{array}\right. \xrightarrow[\text{هم کم می کنیم}]{\text{دو رابطه را از}} hA\Big[\underbrace{(T_\infty - T_{\infty s})}_{T'_\infty} - \underbrace{(T - T_s)}_{T'}\Big] = mC_p \frac{dT}{dt} \; *$$

در حالت S.S

T'_∞ متغیرهای انحرافی

در واقع : $T'_\infty = T_\infty - T_{\infty s}$ (این ثابته)

و

$T' = T - T_s \rightarrow \dfrac{dT'}{dt} = \dfrac{dT}{dt}$ جایگذاری در *

دمای میوه در حالت پایا

از اینجا

$$\longrightarrow T'_\infty - T' = \tau \frac{dT'}{dt} \longrightarrow T_\infty(s) = \tau\,(sT'(s) - \cancel{T'(t=0)}) + T'(s)$$

در لحظه ی صفر دمای محیط و میوه در صفر است.

$$\xrightarrow{\text{بازآرایی}} \frac{\overset{\text{خروجی}}{T'(s)}}{\underset{\text{ورودی}}{T'_\infty(s)}} = \frac{1}{\tau s + 1}$$ سیستم مرتبه ی اول :

تابع انتقال $G(s)$

پس

$$\boxed{G(s) = \frac{T(s)}{T_\infty(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}}$$

با T فرق داره ها

تابع انتقال

← رابطه بین ورودی و خروجی
نسبت خروجی به ورودی

اینجا T بیانه

→ برای دمانج $k=1$ هست
بهره ی سیستم (gain)

τ برای دمانج $= \dfrac{mC_p}{hA}$

سیستم ۹.

Subject :
Date

فرم کلی تابع انتقال سیستم مرتبه اول : $\boxed{G(s)=\frac{k}{\tau s+1}} \longrightarrow \frac{k}{\tau s+1} \longrightarrow$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \overset{\text{برای سیستم مرتبه‌ی اول}}{=} \frac{k}{\tau s+1}$$

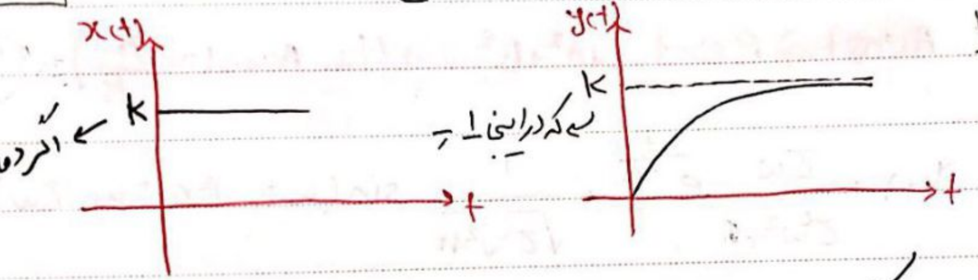
همیشه ضریب مشتق میشه τ مثلاً $\longleftarrow$ $X(s)-Y(s)=(5)\left(\frac{dY}{ds}\right)$

هرچی $\tau\downarrow$ ← سرعت پاسخگویی $\uparrow$ τ $\Longleftarrow$ مثلاً یک دماسنج ۲ دقیقه طول می‌کشه دمای محیط رو نشون بده، یک دماسنج ۵ دقیقه، این یعنی سرعت پاسخگویی.

$$Y(s)=\frac{k}{s}-\frac{\tau k}{s+\frac{1}{\tau}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)=k-ke^{-t/\tau}=k(1-e^{-t/\tau})$$

برای مثال ② ص ۲۲

اگر دماسنج بود ①



یه بار t رو میذاریم یه بار t رو میذاریم.

③ مثال: پاسخ سیستم مرتبه اول به یک ورودی sin را به دست آورید

$$x(t)=\sin\omega t \xrightarrow{L} X(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{\tau s+1}$$

$$\longrightarrow Y(s)=\underbrace{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}_{s\pm i\omega}\cdot\frac{k}{\tau s+1}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+i\omega} + \frac{B}{s-i\omega} + \frac{\overset{C}{k}}{\underset{\tau(s+\frac{1}{\tau})}{\tau s+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t} + Ce^{-t/\tau}$$

در اینجا $\boxed{\begin{matrix} k_2 = \omega \\ k_1 = 0 \end{matrix}}$ ← پاسخ حتماً نوسانی $\xrightarrow{\text{پس}}$

در نهایت ⇐ $e^{it} = \cos t + i\sin t$

این از کجا اومد

9.

$$* \quad \boxed{y(t) = \frac{\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1} e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau^2\omega^2+1} \sin\omega t - \frac{\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1} \cos\omega t}$$

ورودی ما sin ای هست ← به کاری می کنیم که cos در * تبدیل شه به sin ← بتونیم ورودی با خروجی مقایسه کنیم

می دانیم که: $A\cos t + B\sin t = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(t - \text{Arctan}\frac{A}{B})$

پس * میشه:

$$\boxed{y(t) = \underbrace{\frac{\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}}_{a} e^{-t/\tau} + \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \sin(\omega t - \text{Arctan}\,\tau\omega)} \quad (\mathrm{I})$$

A ⊝ بود atan منفی میاد پشتش

پاسخ نهایی سیستم

$x(t) = \sin\omega t \xrightarrow{\text{خروجیش}} (\mathrm{I})$

- بعد از یک مدتی (a) صفر می شود.

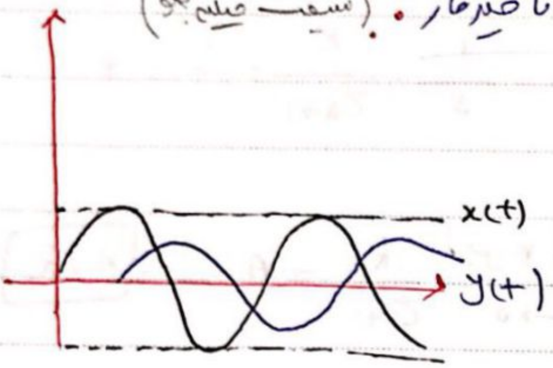
- پاسخ سیستم مرتبه اول به یک ورودی sin ای:

(1) قطعاً نوسانی است، ورودی sin ای، خروجی هم sin ای.

Subject :
Date

② دامنه‌ی پاسخ همواره کوچکتر از دامنه‌ی ورودی است .

③ پاسخ سیستم هم فرکانس ورودی است ولی با یک تأخیر فاز . (شیفت جلو)



این مثال حل جزوه ۱۹ زیر سرعت پاسخگویی است.

① مثال: پاسخ یک سیستم مرتبه اول را به ورودی ایمپالس $\delta(t)$ $x(t)$ بدست آورید .

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{\tau s+1}$$

خروجی / ورودی

صورت مسأله : $x(t)=\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)=1$

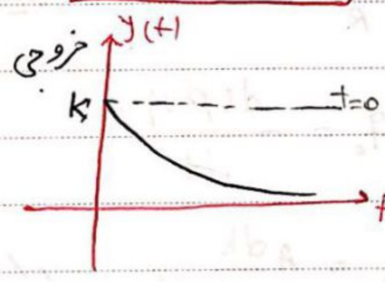
ورودی را سؤال داده .

$$\longrightarrow \frac{Y(s)}{1}=\frac{k}{\tau s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} ⊛$$

ادامه ⊛ : $\frac{k}{\tau(s+\frac{1}{\tau})}$ K $\xrightarrow{\text{پس}}$ $\boxed{y(t)=k\,e^{-t/\tau}}$

$t \longrightarrow \infty$

پس $y(t) \longrightarrow 0$



ورودی / خروجی ← در لحظه صفر

② مثال: پاسخ یک سیستم مرتبه اول را به ورودی پله واحد $(u(t))$ به دست آورید؟

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{\tau s+1}$$

$$x(t)=u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{\tau s+1}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} *$$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{s+\frac{1}{\tau}} \qquad \tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)$$

این جاش حل کن خودت.

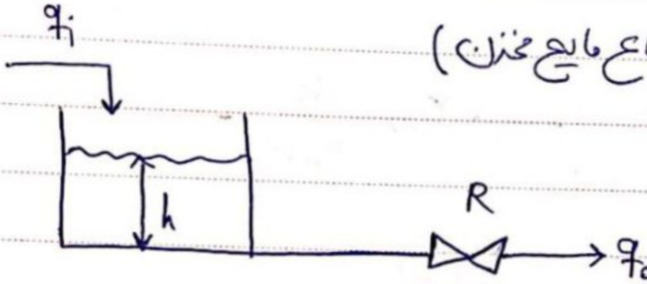
$$*:\quad y(t)=\frac{A}{s}+\frac{KB}{s+\frac{1}{\tau}}\xrightarrow[s\to 0]{\text{طرفین } * s}\frac{k}{\tau s+1}=A\longrightarrow\boxed{A=k}$$

طرفین * $s+\frac{1}{\tau}$ و $s=-\frac{1}{\tau}$

$$\frac{k}{-\frac{1}{\tau}}=K_1B\longrightarrow\boxed{B=-\tau}$$

۱۴ رسم شود

④ مثال: مثالی دیگر از سیستم مرتبه اول (ارتفاع مایع مخزن)



A: سطح مخزن

R: مقاومت شیر خطی

• برای شیر خطی: ۱) ρ (دانسیته) ثابت ۲) $q=\frac{h}{R}$

موازنه جرم $\rho q_i-\rho q_o=\frac{d(\rho V)}{dt}$, $V=A\cdot h$

در حالت S.S

$$\begin{cases} q_i-q_o=A\frac{dh}{dt}\\ q_{is}-q_{os}=0\end{cases}\xrightarrow[\text{از هم}]{\text{کم کردن روابط}}\underbrace{(q_i-q_{is})}_{Q_i}-\underbrace{(q_o-q_{os})}_{Q_o}=A\frac{dh}{dt}$$

Subject :
Date

$$\boxed{Q_i - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt}}$$ ادامه

در واقع : $Q_i = q_i - q_{is}$,

$Q_o = q_o - q_{os} = \frac{h}{R} - \frac{h_s}{R} = \frac{h-h_s}{R}$ (H)

, $q_o = \frac{h}{R}$

ضریب مشتق τ

$\xrightarrow{R * \text{طرفین}} RQ_i - H = RA\frac{dH}{dt} \longrightarrow RA\frac{dH}{dt} + H = RQ_i$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} \tau[SH(s) - H(0)] + H(s) = RQ_i(s)$ ($H(0) = 0$)

$$G(s) = \boxed{\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\tau s+1}}$$

نتیجه: R : بهره این سیستم ✓

τ : RA ✓

مقاومت شیر

$$\boxed{G(s) = \frac{k}{\tau s+1}}$$

($k \to R$, $\tau \to RA$)

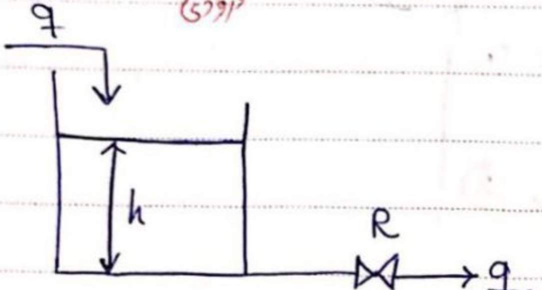
- همه ی مثال های دما شیع برای این هم
صادق هستند و فقط K و τ شان فرق میکند.

جلسه 5 : با ویس .

■ سیستم مرتبه اول

تابع انتقال : $G(s) = \frac{\overset{\text{خروجی}}{Y(s)}}{\underset{\text{ورودی}}{X(s)}} = \frac{k}{\tau s+1}$

مثال ۱: تانک ارتفاع



شیر خطی $q_0 = \frac{h}{R}$

(دبی و ارتفاع مایل پشت آن ارتباط خطی دارند.)

موازنه جرم روی مخزن $\longrightarrow$ تبدیل لاپلاس $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\underbrace{AR}_{\tau}s+1}$

بهره سیستم $K = R$

$\tau = AR$

$G(s) = \frac{1}{\tau s+1}$

$\downarrow$

$\frac{mC_p}{hA}$

- کار تابع انتقال تعیین رابطه بین ورودی و خروجی است.

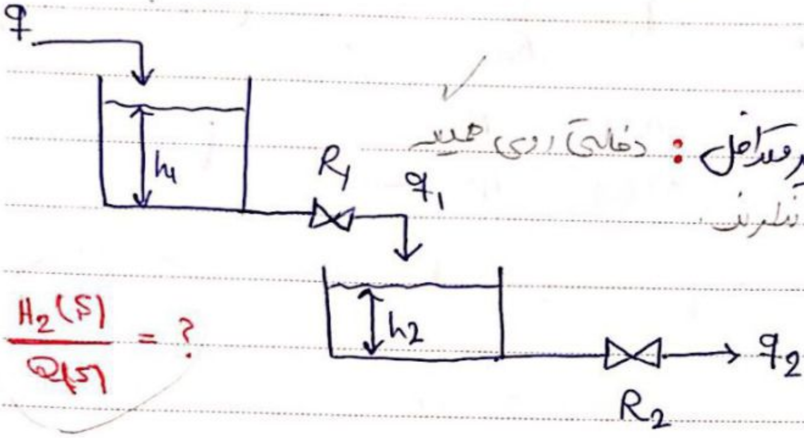
$x(t) = \checkmark \longrightarrow X(s) = \checkmark$

$G(s) = \checkmark \longrightarrow Y(s) = \checkmark \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Y(t)$

Subject:
Date

سیستم های درجه اول سری (تانک های ارتفاع):

● سیستم ها 2 حالت دارند:
① غیر متداخل.
② متداخل.

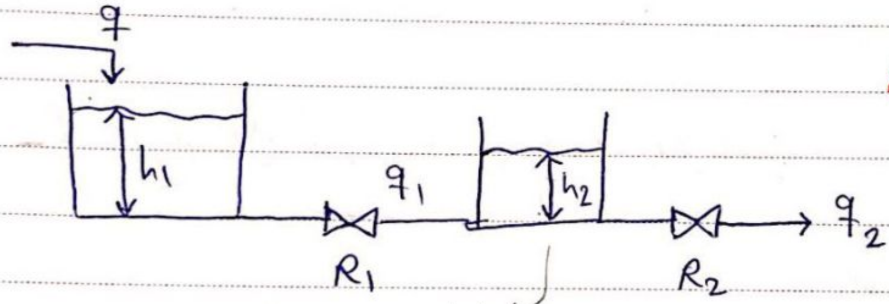


— تانک های سری غیر متداخل: دخالتی روی هم ندارند

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1}$$ شیر خطی

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = ?$$

— سیستم متداخل:



$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

این ارتفاع تأثیری روی دبی خروجی اول دارد یعنی دخالت دارد روی دبی قبلی

Subject:
Date

● تانک های سری غیر متداخل :

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1}$$

$$q_s = \frac{h_{1s}}{R_1}$$

$$\underbrace{q_1 - q_{1s}}_{Q_1(t)} = \frac{\widetilde{h_1 - h_{1s}}}{R_1}$$

$$Q_1(S) = \frac{H_1(S)}{R_1}$$

$$\frac{H_1(S)}{Q(S)} = \frac{R_1}{A_1R_1S+1} \Rightarrow \overset{*}{\frac{H_1}{R_1}} = \frac{Q(S)}{A_1R_1S+1}$$

$$\frac{H_2(S)}{Q(S)} = ?$$

برای تانک دوم : $\frac{H_2(S)}{Q_1(S)} = \frac{R_2}{A_2R_2S+1}$ ورودی

خروجی

$$Q_1(S) = \frac{H_1(S)}{R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{H_2(S)}{\frac{H_1(S)}{R_1}} = \frac{R_2}{A_2R_2S+1}$$

*

$$\Rightarrow \frac{H_2(S)}{\frac{Q(S)}{A_1R_1S+1}} = \frac{R_2}{A_2R_2S+1} \Rightarrow \boxed{\frac{H_2(S)}{Q(S)} = \frac{R_2}{(\underbrace{A_1R_1S}_{\tau_1}+1)(\underbrace{A_2R_2S}_{\tau_2}+1)}}$$

● درحالت کلی تابع انتقال تانک های سری غیر متداخل برابر حاصل ضرب توابع انتقال آنها می باشد.

برای 3 تانک : $\frac{H_3(S)}{Q(S)} = \frac{R_3}{(\tau_1+1)(\tau_2+1)(\tau_3+1)}$

مثال): پاسخ ۲ تانک غیرتداخل کاملاً مشابه را به یک ورودی پله‌ی واحد محاسبه نمایید.

$\checkmark A_1 = A_2 = A$

$Q(t) = U(t)$ $\quad \checkmark \tau_1 = \tau_2 = \tau$ $\quad \dfrac{H_2(s)}{Q(s)} = \dfrac{R_2}{s(\tau s+1)^2}$

$\checkmark R_1 = R_2 = R$

$Q(t) = U(t) \xrightarrow{L} Q(s) = \dfrac{1}{s}$

$$H_2(s) = \frac{\cancel{R}}{s(\tau s+1)^2} = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{(\tau s+1)^2} + \frac{C}{(\tau s+1)}\right)\cancel{R}$$

برای به دست آوردن A $\xrightarrow[s=0]{*s}$ $\boxed{A=1}$

برای به دست آوردن B $\xrightarrow[(\tau s+1)^2=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{\tau}]{*(\tau s+1)^2}$ $\dfrac{1}{s} = \dfrac{(\tau s+1)^2 A}{s} + B + (\tau s+1)C \longrightarrow \boxed{B=-\tau}$

برای به دست آوردن C $\xrightarrow{\text{از رابطه‌ی B مشتق می‌گیریم}}$ $-\dfrac{1}{s^2} = \tau C \Rightarrow -\dfrac{1}{\frac{1}{\tau^2}} = \tau C$

$-\tau^2 = \tau C \Rightarrow \boxed{C=-\tau}$

مشتق می‌شود صفر

$$H_2(s) = R\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s+1)^2} - \frac{\tau}{\tau s+1}\right) \xrightarrow{L^{-1}} H_2(t) = R\left(1 - \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau}\right)$$

$\tau^2(s+\frac{1}{\tau})^2 \qquad (s+\frac{1}{\tau})\tau$

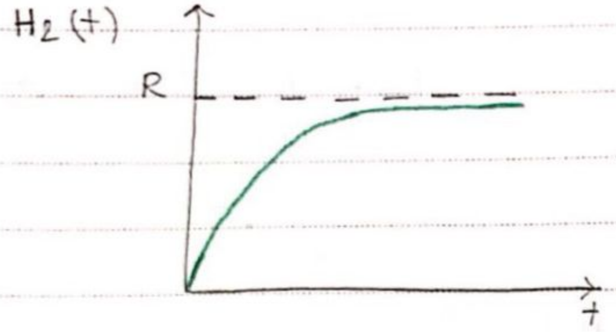
$t \longrightarrow \dfrac{1}{s^2} \qquad \dfrac{1}{\tau(s+\frac{1}{\tau})^2} \qquad \dfrac{1}{s+\frac{1}{\tau}}$

$t - t_0$

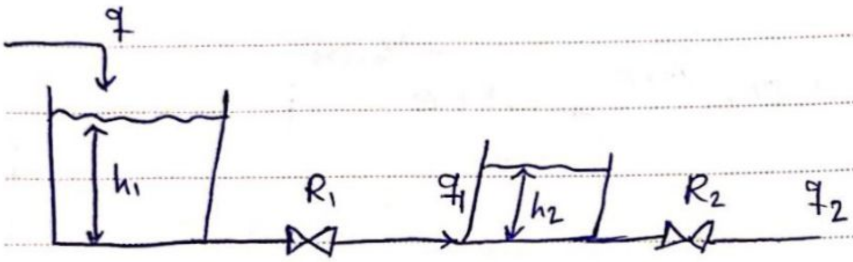
$e^{-t_0 s} F(s)$

ت برای لاپلاس

Subject:
Year. Month. Date. ( )



● تانک سری متداخل:



$$q_1 = \frac{h_2 - h_1}{R_1}$$

$Q(s) - Q_1(s) = A_1(sH_1(s) - \underbrace{H_1(0)}_{0})$

$$q - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \longrightarrow Q(s) - Q_1(s) = A_1 S H_1(S)$$

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \longrightarrow Q_1(s) = \frac{H_1(s) - H_2(S)}{R_1}$$

$$q_1 - q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \longrightarrow Q_1(s) - Q_2(s) = A_2 S H_2(S)$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \longrightarrow Q_2 = \frac{H_2(s)}{R_2}$$

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q(s)} = ?$$

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 S^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2 S) + 1}$$

تابع انتقال ۲ تا تانک سری متداخل

سیستم های درجه 2

غیرتداخل: $G(s)=\dfrac{R_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \xrightarrow[]{\text{ورودی } Q(t)=U(t)} H_2(t)=R\left(1-\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}-e^{-t/\tau}\right)$

تداخل: $G(s)=\dfrac{R_2^*}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2+A_1R_2)s+1} \xrightarrow[]{\text{ورودی پله ی واحد } Q(t)=U(t)}$

$$\longrightarrow H_2(t)=R\left[1-1.17e^{-t/2.62\tau}+0.17e^{-t/0.38\tau}\right]$$

حفظ نمی خواد ✗

پاسخ سیستم تداخل سری به یک ورودی پله ی واحد.

به خاطر ضریب هایی که وجود دارد غیرتداخل به مقدار
دیرتر به آن مقدار نهایی می رسد

سیستم های مرتبه ی دوم:

فرم کلی تابع انتقال: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{k}{\tau^2 s^2+2\tau\zeta s+1}$

سیستم مرتبه 2

ζ زتا: ضریب میرایی

طبق تابع انتقال با انتقال پیدا می کند

ورودی سری — و محاسبه خروجی

$$\boxed{G(s)=\dfrac{k^*}{\tau^2 s^2+2\tau\zeta s+1}}$$

مثال: مقادیر بهره (K) ثابت زمانی (τ) و ضریب میرایی (ξ) برای 2 تانک سری تداخل به دست آورید. همیشه ضریب S^2 هست می‌شود τ^2.

$\tau^2 = \tau_1 \tau_2$ $\qquad$ $2\tau\xi = \tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}} \qquad \boxed{\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}}$$

$$\boxed{K = R_2}$$

مثال: پاسخ یک سیستم مرتبه‌ی دوم به ورودی پله‌ی واحد را به دست آورید.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$x(t) = U(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K}{s\underbrace{(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1)}_{\Delta}} = \frac{A}{s} + \frac{}{(s+s_1)} + \frac{}{(s+s_2)}$$

$x^2 - x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ حقیقی

$\Delta = 0$ مضاعف

$\Delta < 0$ موهومی

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\tau \pm \sqrt{4\xi^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2}$$

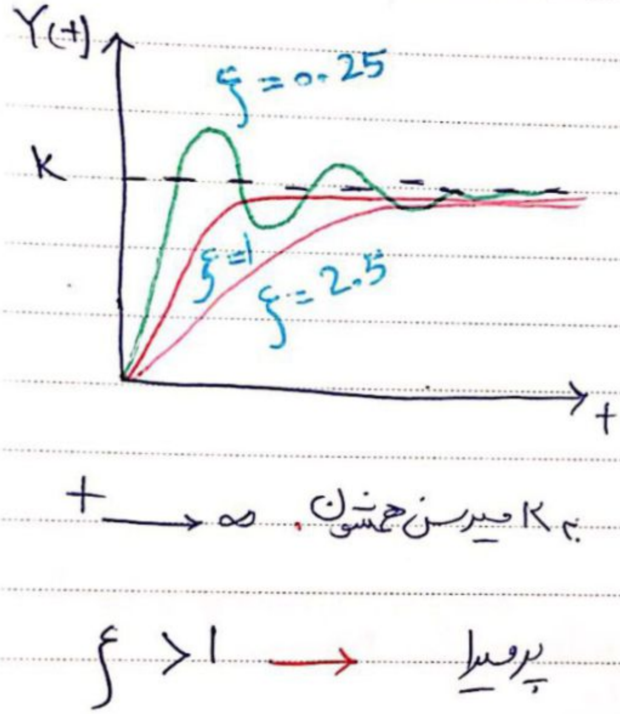
$$s_{1,2} = \frac{-\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \longrightarrow$$ اگر $\xi<1$ شود پاسخ نوسانی می‌شود.

$$\text{if } \xi < 1 \rightarrow Y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi t/\tau} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau} + \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم برای $\xi < 1$. نیاز به حفظ نیست. فرمولاشم توی امتحان نمیاد مفهوم مهمه.

$$\text{if } \xi = 1 \rightarrow Y(t) = K\left[1 - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau}\right]$$

$$\text{if } \xi > 1 \rightarrow Y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi \frac{t}{\tau}}\left(\cosh\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sinh\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



شکل کنکوری!

$t \rightarrow \infty$ ، به K میرسن همشون.

نکته: هرچه ξ پایین‌تر بیاید پاسخ نوسانی‌تر خواهد بود.

$\xi > 1 \rightarrow$ پرمیرا

$\xi = 1 \rightarrow$ میرای بحرانی

$\xi < 1 \rightarrow$ سیستم کم میرا

جلسه 6 :

سیستم درجه دوم :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}$$

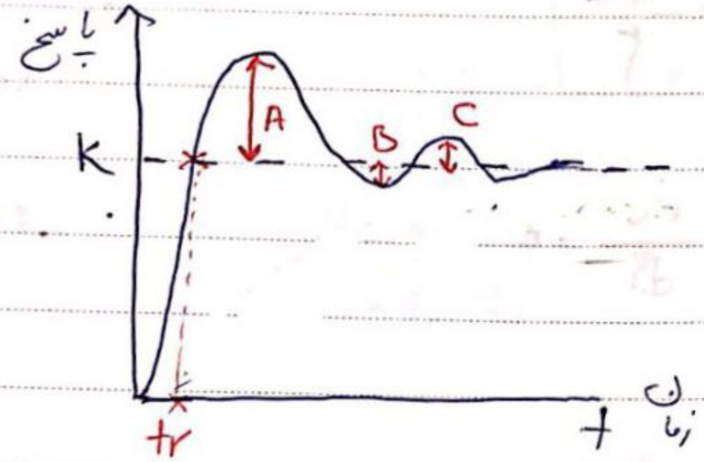
ویس

$$S_{1,2} = \frac{-\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}$$

$\xi < 1$

$\xi = 1$

> 1



- overshoot : حداکثر انحراف از مقدار نهایی.
(فرارفت)

$$\boxed{\text{overshoot} = \frac{A}{K} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

$\xi \downarrow$: overshoot $\uparrow$

- Decay ratio :
(نسبت فروکش)

$$\boxed{\text{decay ratio} = \frac{C}{A} = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

- Rise time : زمانی است که سیستم برای اولین بار پاسخش به مقدار نهایی برسد.
(زمان خیزش)

$$= K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp\left(-\xi\frac{t}{\tau}\right) \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

طرف چپ صفر می‌شود پس sin صفر شده.

$\sin\theta = 0$

$\theta = n\pi$

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t_r + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = n\pi$$

$$t_r = \frac{\left(n\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

- Response time: (زمان پاسخ)

$$\boxed{\text{Response time} = \frac{3\tau}{\xi}}$$

- peak time: (زمان پیک)

$$\text{peak time} = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

■ سیستم های غیرخطی:

در کنترل فرآیند تا همین جا خطی سازی انجام می دهیم.

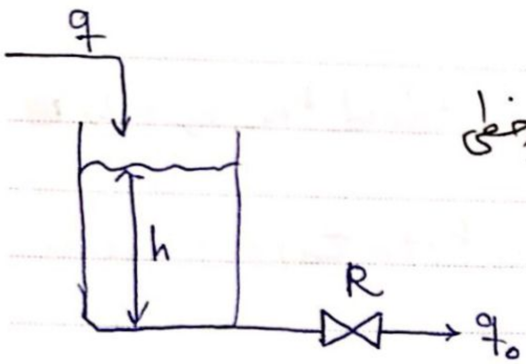
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x)}{2!} + \dots$$

- برای مواقعی که سیستم غیرخطی است از بسط تیلور استفاده کرده و سیستم را خطی می کنیم. : بسط تیلور

مثال: مخزن ارتفاع $\Rightarrow q_0 = C\sqrt{h}$

- مثلا نقطه ای است که خطی سازی حول آن صورت می گیرد.

Subject:
Date



شیر غیرخطی : $q_o = C\sqrt{h}$

موازنه : $q - q_o = A\frac{dh}{dt}$

$$\begin{cases} q - C\sqrt{h} = A\frac{dh}{dt} \\ S.S: \; q_s - C\sqrt{h_s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H = h - h_s \\ Q = q - q_s \end{cases} \Rightarrow Q - C(\sqrt{h} - \sqrt{h_s}) = A\frac{dH}{dt} \quad *$$

$\sqrt{h}$ را حول هر h_s (x_0) بسط می دهیم:

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_s} + (h - h_s)\frac{1}{2\sqrt{h_s}} \Rightarrow$$ جایگزینی در *

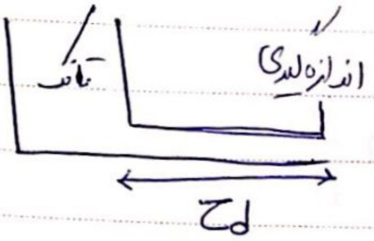
$$Q - \underbrace{\frac{C}{2\sqrt{h_s}}}_{1/R} H = A\frac{dH}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{H(s)}{G(s)} = \frac{R}{ARs+1} \quad *$$

$$R = \frac{2\sqrt{h_s}}{C}$$

نکته: اگرچه تابع انتقال به دست آمده * مشابه تابع حالت خطی است ولی دقت شود که بهره و ثابت زمانی تابعی از $H(s)$ (نقطه‌ی خطی سازی) است بنابراین خطی سازی وابسته به نقطه‌ی خطی سازی است.

Subject :
Date

■ زمان مرده dead time :



به جای $f(t)$ ، $f(t-\tau_d)$ داریم.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau_d s} \qquad G(s) = \frac{K\, e^{-\tau_d s}}{\tau s+1}$$

اگر زمان مرده داشته باشیم یک $e^{-\tau_d s}$ در تمام توابع انتقال ضرب می‌شود.

■ پاسخ تابع پله‌ای و ضربانی:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(x)}$$

ورودی پله‌ای : $X(s) = \frac{1}{s}$

$x(t) = u(t)$

$$\underbrace{Y_1(s)}_{\text{ضربانی}} = s\,\underbrace{Y_2(s)}_{\text{پله‌ای}}$$

ورودی ضربانی : $X(s) = 1$

$x(t) = \delta(t)$

● اگر برای سیستمی پاسخ را به ورودی پله‌ای داشته باشیم با مشتق گرفتن از آن پاسخ ضربانی سیستم به دست می‌آید.

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{Y_2(s)}{1/s} & \text{پله‌ای} \\ G(s) = Y_1(s) & \text{ضربانی} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{Y_1(t)}_{\text{ضربانی}} = \frac{dY_2}{dt}\ \text{(پله‌ای)}$$

مثال) اگر پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای مطابق $y(t)=1-te^{-2t}$ باشد پاسخ سیستم به ورودی ضربانی را به دست آورید.

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1(t) = -e^{-2t}+2te^{-2t}$$

پاسخ به ورودی ضربانی

مثال) برای یک سیستم درجه 2 میرای بحرانی پاسخ به یک ورودی ضربانی را بدست آورید.

$$\xi=1 \Rightarrow y_2(t)=K\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$

این فاکتور گرفته‌ی همونیم که داری قاطی نشن تو

$$y_1(t)=\frac{dy_2}{dt}=K\left[\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}\right]$$

■ تابع انتقال عنصر اندازه‌گیر (m):

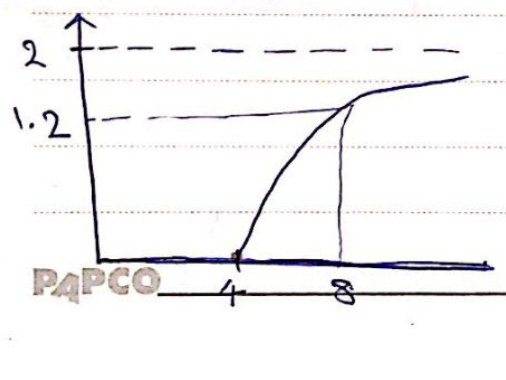
$G_m(s)=$

بیان
تجربی

$$\frac{1}{\tau s+1}$$

یعنی به دما سنج ورودی (پله‌ای یا ضربانی) می‌دهیم بعد خروجی را به صورت ثابت زمانی می‌نویسیم.

مثال: تابع تبدیل دماسنجی که به عنوان عنصر اندازه‌گیر استفاده می‌شود مشخص نیست با اعمال یک ورودی پله‌ای به اندازه‌ی 2 واحد جواب‌های زیر ثبت شده است.



Subject:
Date

$$G_m(s) = \frac{K_m e^{-\tau_d s}}{\tau_m s + 1}$$

$\tau_d = 4$

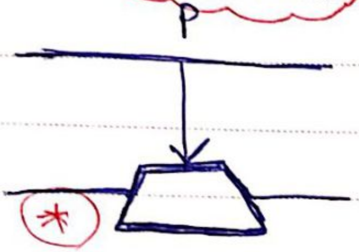
$\tau_m = 63.2 \times 2 = 1.2 \longrightarrow t = 8 \rightarrow \tau_m = 8 - 4 = 4$

پاسخ را $K = 1$

$$\boxed{G_m(s) = \frac{e^{-4s}}{4s+1}}$$

شیر کنترلی : (۷) valve

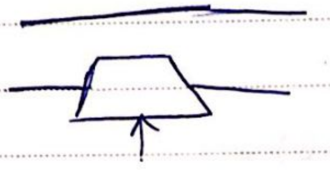
- نیوماتیک : با فشار باد باز و بسته می‌شود مثل در اتوبوس.
- برقی : با جریان باز و بسته می‌شود. 4mA – 20mA



$P = 3 - 15$ psi نیوماتیک

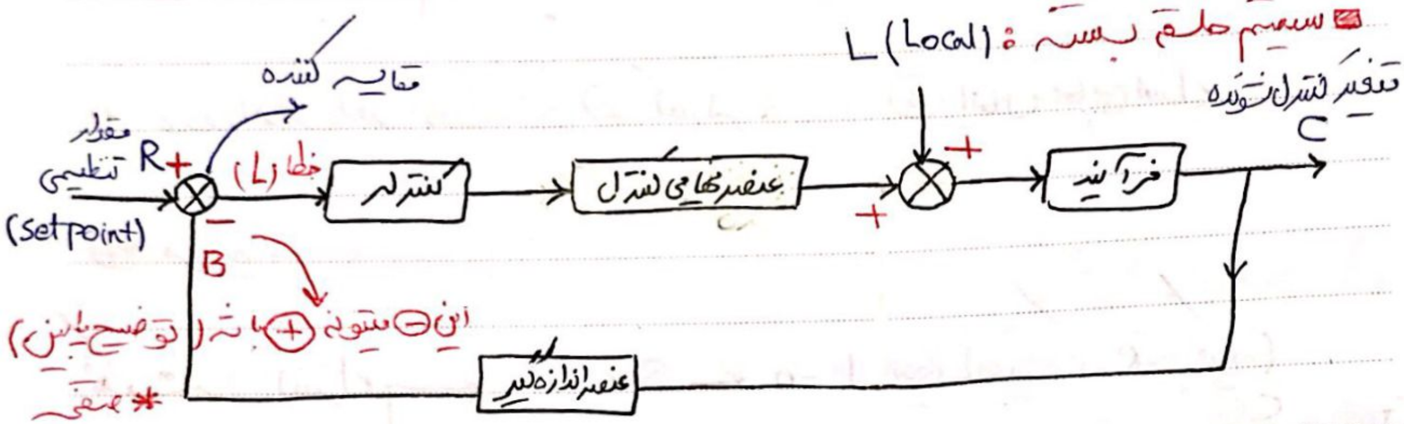
(*)

نیوماتیک ها:
- Air to close : P↑ : Q↓
- Air to open : P↑ : Q↑ (*)



جلسه 7 :

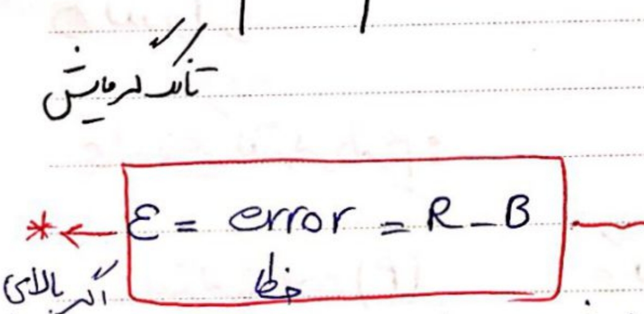
سیستم حلقه بسته : L(Local)



local : یعنی ورودی (باری که وارد فرآیند می شود.)

- سیستم های کنترلی ① feedback (متغیر کنترل شونده کنترل و sense می شود.)

② feed forward (متغیر تاثیر گذار کنترل و sense می شود.)



- حتماً feedback باید توی سیستم باشد

این الان یه سیستم feedback ـه.

$$\boxed{\varepsilon = error = R - B}$$
خطا

* ← اگر بالای B ⊖ باشد

خطا میتونه ⊕ یا ⊖ باشه.

- عنصرهای کنترل شیرها (valve ها) هستند مثل switch ها

اگر بالای B ⊕ باشد ← $\varepsilon(t) = R + B$

نکته: در یک سیستم حلقه بسته‌ی Feedback چهار عنصر (المان) اصلی وجود دارد:

① عنصر اندازه‌گیر. ② کنترلر. ③ المان نهایی کنترل.

④ فرآیند.

نکته: کنترل
- ← Servo ← $L=0$ (یعنی L تغییر نمی‌کنه R تغییر میکنه)

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

- ← Regular ← $R=0$ (یعنی R تغییر نمی‌کنه و L تغییر می‌کنه.)

L ← ورودی سیستم

$$\frac{C}{L} = ?$$

شیر کنترل ↓ المان نهایی کنترل هست.
- ← پنوماتیک 3_15 Psi
- ← برقی

$$\boxed{G_v(S) = \frac{K_v}{\tau_v S+1}}$$

کنترلر

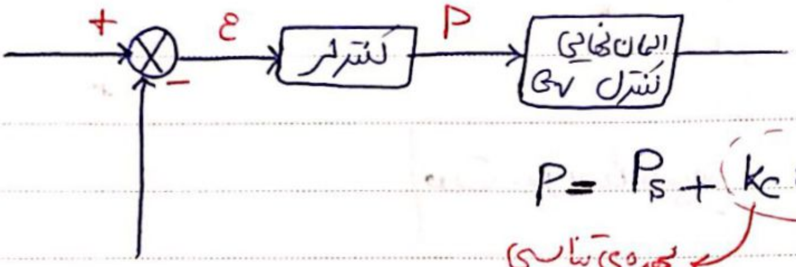
چهار نوع کنترلر داریم:

1- کنترلر تناسبی (P)
2- کنترلر تناسبی - مشتقی (PD)
3- کنترلر تناسبی - انتگرالی (PI)
4- کنترلر تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID)

Subject :
Date

① کنترلر تناسبی (proportional controller) (P)

- یعنی این نوع کنترلر متناسب با مقدار خطا به شیر کنترلی دستور می‌دهد که باز یا بسته شود.



$P = P_s + k_c \varepsilon(t)$

بهره‌ی تناسبی

متناسب با مقدار خطا

$\frac{P - P_s}{P} = k_c \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$

$G_c = \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = k_c$

k_c میتونه مثبت باشه و میتونه منفی باشه

K_c واحد : $\frac{\text{فشار}}{\text{error}}$

if کنترلر دما باشد : $[k_c] = \frac{psi}{°C}$

if کنترلر فشار باشد : $[k_c] =$ بی بعد

$k_c = \infty$

به این سیستم کنترلر on/off میگن.

$\varepsilon(t) > 0$ ← فشار خیلی ↑ میشه ← شیر بسته میشه ← یعنی off

$\varepsilon(t) < 0$ ← فشار خیلی ↓ میشه ← شیر باز میشه ← یعنی on

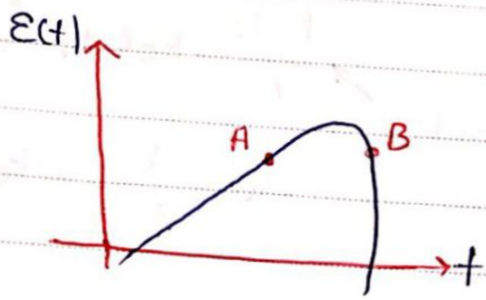
کنترلر پیش بینی کننده هم داریم.

② کنترلر تناسبی _ مشتقی (Proportional_ Deriavative controller) (PD)

$$P = P_S + K_C \left[\varepsilon(t) + \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} \right] \quad (*)$$

ثابت زمانی مشتق

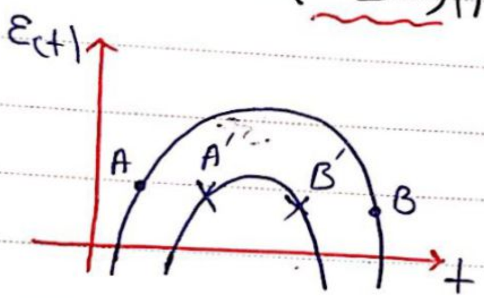
مشتق خطا



$\boxed{\text{وقت زمان خطا رو نمی‌بینه}}$

• در این کنترلر مقدار و جهت و خطا محاسبه می‌شود.

③ کنترلر تناسبی _ انتگرالی (Proportional Integral) (PI)



$$(*) \uparrow \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_C(1+\tau_D s)$$

$\boxed{\text{جهت خطا رو نمی‌بینه}}$

کرینسته : $P = P_S + K_C \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t)\, dt \right]$

$$\boxed{G_C = \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_C \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)}$$

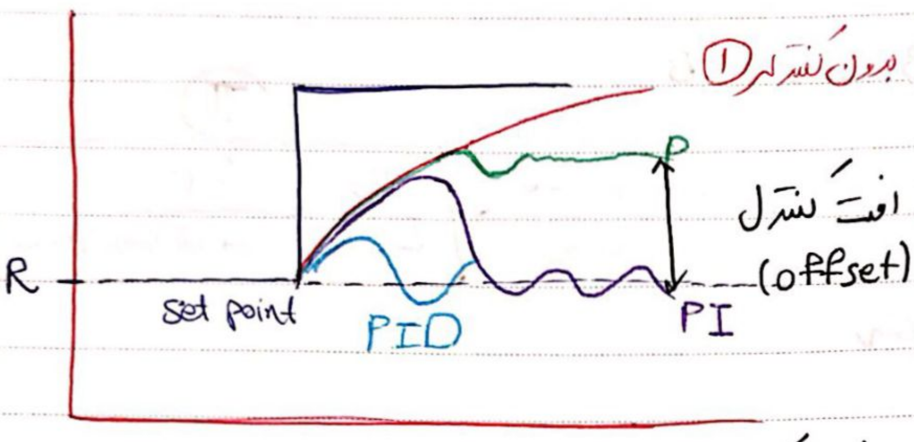
④ کنترلر تناسبی _ انتگرالی _ مشتقی (PID)

$$G_C = K_C \left[1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s} \right]$$

۴۳

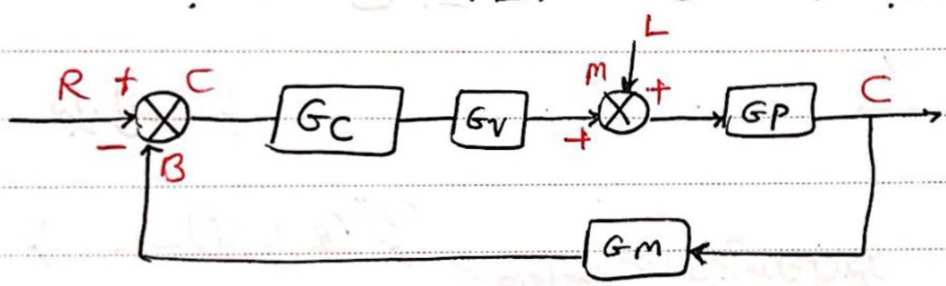
Subject:
Date

← پس ما ۴ مدل کنترلر داریم (مقایسه‌ی کنترلرها)



• در کنترلر PI افت کنترل نداریم.

• در کنترلر PID overshoot (فرا رفت) سیستم کمتر خواهد بود به دلیل پیش بینی توسط ترم مشتق، در نتیجه در PID نوسان کمتر و یا بدون نوسان خواهد بود.



• برای حالت servo ($L=0$) و $\frac{C}{R}=?$:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = R - B \\ B = G_M C \\ M = \varepsilon G_C G_V \\ C = (M + \cancel{L}_{\,0})\, G_P \end{cases}$$

در نهایت برای حالت servo

I

$$\xrightarrow{\text{servo}} \boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C G_V G_P}{1 + G_C G_V G_P G_M}}$$

Subject:
Date

• برای حالت Regulor $(R=0)$ ، $\frac{C}{L} = ?$.

$$\begin{cases} l = \cancel{R}^{\,0} - B \longrightarrow l = -B \\ B = G_m C \\ m = l G_c G_v \\ C = (m+l) G_p \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Regulor}]{\text{در نهایت برای حالت}} \boxed{\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}}$$

II

• تابع تبدیل حلقه باز (Gopen) : $G_{op} = G_m G_v G_p G_c$

در حالت کلی تابع تبدیل برای حلقه‌ی feedback ، وقتی بین x ورودی و y خروجی برابر است با

$$x \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow Y$$

$$G = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{حاصل‌ضرب تمام توابع تبدیل بین } x \text{ و } y}{1 + G_{op}}$$

برای حالت I و II ببین

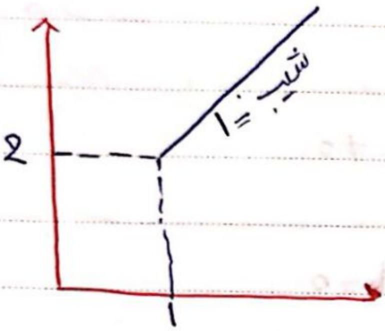
برای I توابع تبدیل بین R و C

برای II توابع تبدیل بین l و C

Subject:
Date

جلسه 8 :

مثال : اگر سیگنال زیر به یک کنترلر تناسبی مشتقی وارد شود و پاسخ زمانی کنترلر به صورت نمودار روبه رو باشد، مقادیر K_c و τ_D را به دست آورید.



$$\varepsilon(t) = 0.2\,t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{\varepsilon(s) = \frac{0.2}{s^2}} \quad *$$

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c(1 + \tau_D s) \quad \text{I}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری * در I}} P(s) = \frac{0.2}{s^2} K_c(1 + \tau_D s)$$

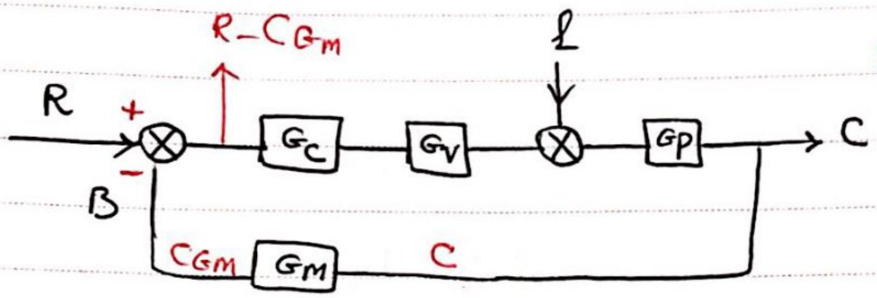
$$P(s) = \frac{0.2 K_c}{s^2} + \frac{0.2 \tau_D K_c}{s}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{p(t) = \underbrace{0.2 K_c}_{\text{slope}} t + \underbrace{0.2 \tau_D K_c}_{\text{intercept}}}$$

$$0.2 K_c = 1 \longrightarrow \boxed{K_c = 5}$$

$$@\ t = 0 \longrightarrow p(t) = 2 \xrightarrow{\text{then}} \boxed{\tau_D = 2}$$

● سیستم های حلقه بسته :



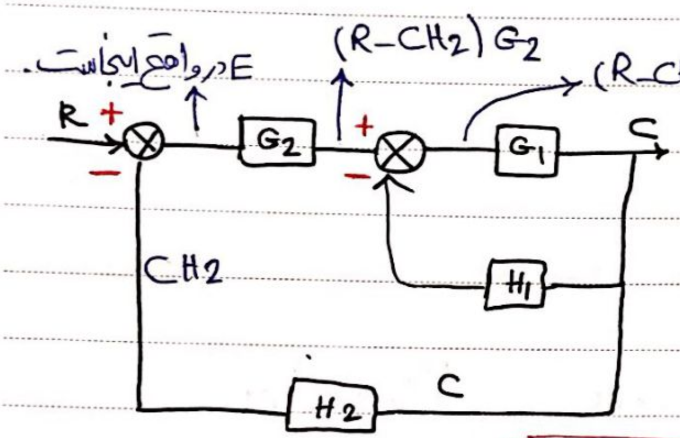
قرمزها نمونه‌های خروجی هستند.

$\frac{C(s)}{L(s)} = ?$ Regulor : $R=0$, $L\neq 0$

$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$ servo : $R\neq 0$, $L=0$

مثال: $\frac{E}{R}$ را حساب کنید.

↓ Error ratio



$C=((R-CH_2)G_2-CH_1)G_1$

$E = R - CH_2$

$\div R$

$\frac{E}{R} = 1 - \frac{CH_2}{R}$

$L \; H_2=0 \longrightarrow \boxed{\frac{E}{R}=1}$

تو گزینه ها $H_2=0$

$\boxed{\frac{E}{R}=1}$

* اگر H_2 (عنصرما) دینامیک بود

↓

$\frac{1}{\tau_m s+1}$

↓

هرچه τ کوچکتر باشد

↓

سیستم زودتر می‌رسد به نقطه نهایی

که بعضی موقع دینامیک داشته باشیم

1) $\frac{1-G_1H_1}{1-G_1H_1+G_2H_2}$ ✓

2) $\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1H_1+G_2H_2G_1}$

3) $\frac{G_1G_2H_1}{1-G_1H_1+GG_2H_2}$

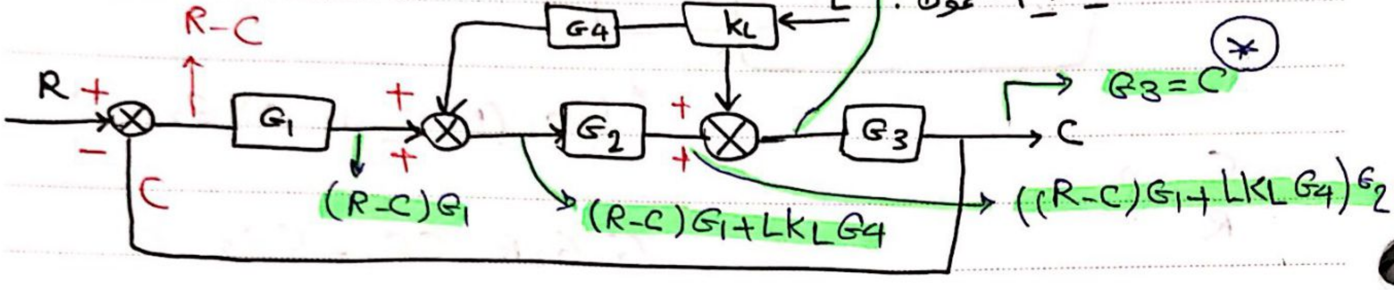
4) $\frac{G_1G_2H_2}{1+G_1H_1-G_1G_2H_2}$

① پیدا کردن جواب.

Subject:
Date

$((R-C)G_1 + Lk_L G_4)G_2 + Lk_L$ (*) ‎ را حساب کنید. $\frac{C}{L}$:مثال

R=0 میذاریم معمولاً.



$\frac{C}{L} = ?$ $\qquad R=0 \longrightarrow$ سیستم Regular

$$[((R-C)G_1 + Lk_L G_4)G_2 + Lk_L]G_3 = C$$

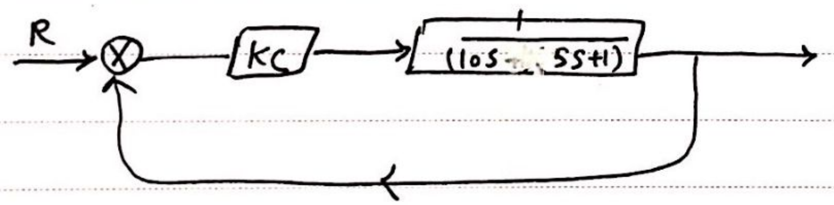
$$-CG_1G_2G_3 + Lk_L G_4 G_2 G_3 + Lk_1 G_3 = C$$

$$C + CG_1G_2G_3 = L(k_L G_4 G_2 G_3 + k_1 G_3)$$

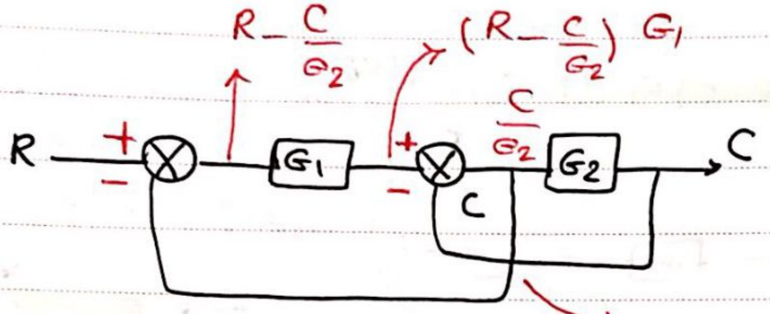
$$C(1 + G_1G_2G_3) = L(k_L G_4 G_2 G_3 + k_L G_3)$$

$$\frac{C}{L} = \frac{G_2G_3G_4k_L + k_LG_3}{1 + G_1G_2G_3}$$

تمرین ۲: در سیستم کنترلی زیر مقدار kc در حالت پایداری بحرانی چه قدر است؟



مثال:



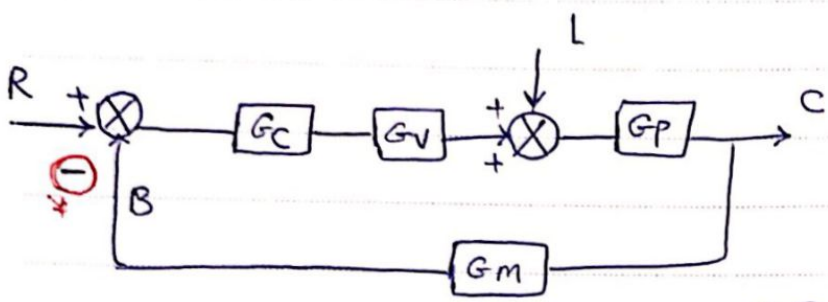
$$\frac{C}{R} = ?$$

$$\left(G_1\left(R - \frac{C}{G_2}\right) - C\right) G_2 = C$$

$$G_1 G_2 R - C G_1 - C G_2 = C$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2}}$$

جلسه ۹ :



✓ هرچی تابع تبدیل بین ۲ عنصر هست مینویسیم خروجی

مکانیسم

servo $\begin{cases} R \neq 0 \\ L = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p}$ ورودی

Regulator $\begin{cases} R = 0 \\ L \neq 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{C(s)}{L(s)} = \dfrac{G_p}{1 + G_v G_m G_p G_c}$ $\quad G_{op}$

حالت کلی : $C(s) = \dfrac{G_c G_v G_p}{1 + G_{op}} R(s) + \dfrac{G_p}{1 + G_{op}} L(s)$

M ← اندازه‌گیری

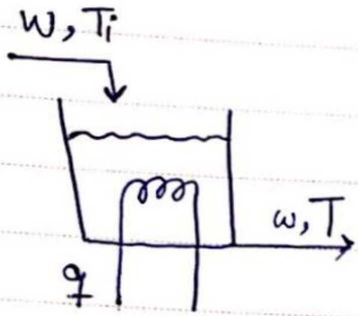
دماسنج $G_m = \dfrac{1}{\tau_m s + 1}$ $\quad \tau_m \ll$ خیلی کوچک باشد ثابت زمانی $\rightarrow G_m = 1$

یعنی دماسنج زود پاسخ می‌دهد.

یعنی عنصر زود جواب می‌دهد

کنترلر : تناسبی (P) (Kc) تناسبی-انتگرالی (PI)

تناسبی-مشتقی (PD) تناسبی-انتگرالی-مشتقی (PID)



موازنه انرژی :
$$\rho c v \frac{dT}{dt} = wc(T_i - T) + q$$

در حالت s.s
$$0 = wc(T_{is} - T_s) + q_s$$

$$\rho c v \frac{dT}{dt} = wc\left((T_i - T_{is}) - (T - T_s)\right) + q - q_s$$

$$T_i' = T_i - T_{is}$$

$$T' = T - T_s \longrightarrow \frac{dT'}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

$$Q = q - q_s$$

طرفین تقسیم بر wc :
$$\frac{\rho v}{w}\frac{dT'}{dt} = T_i' - T' + \frac{Q}{wc}$$

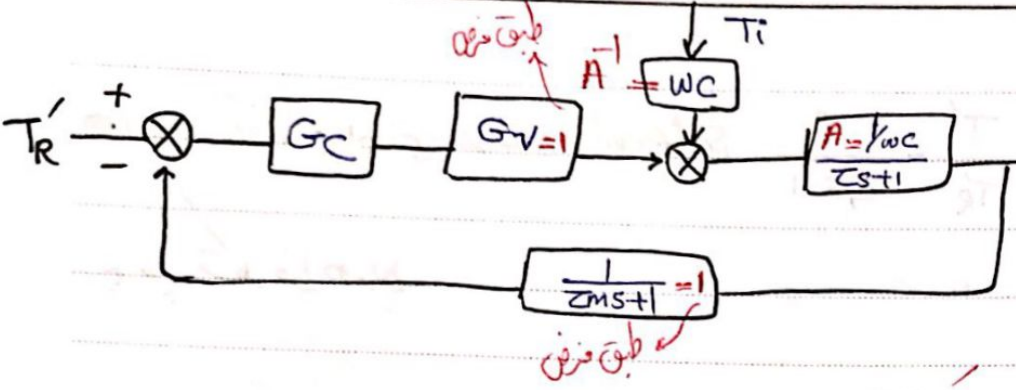
$$\Big\downarrow L$$

$$sT'(s) - T'(0)$$
0

$$\rightarrow T'(s) = \frac{1}{\tau s+1} T_i'(s) + \frac{1/wc}{\tau s+1} Q(s)$$

$$* \tau = \frac{\rho v}{w}$$

Subject :
Date



$A=\frac{1}{wC}$

$A^{-1}=wC$

● پاسخ گذرای سیستم های کنترلی :

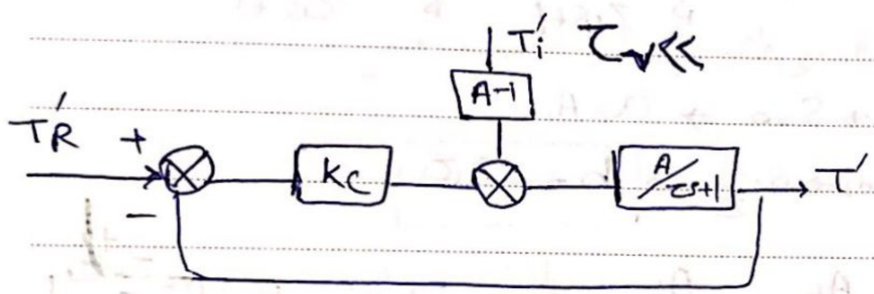
الف)

حالت ① : سیستم servo با کنترلر تناسبی باشد .

برای راحتی کار ۲ فرض می کنیم : $\tau_m \ll$

$\tau_v \ll$

servo → T'_R ✓
→ $T'_i=0$



$$\frac{T'}{T'_R}=\frac{k_c\frac{A}{\tau s+1}}{1+k_c\frac{A}{\tau s+1}}=\frac{k_cA}{\tau s+1+k_cA}$$

← رابطه ی دمای خروجی با دمایی که ما تنظیم می کنیم

فیدبک منفی

برای این سیستم درجه یک شود باید طرفین را بر $1+k_cA$ تقسیم کنیم تا به این شکل شود : $\frac{k_cA}{\tau s+1}$ A_1

$$\frac{T'}{T'_R}=\frac{A_1}{\tau_1 s+1}=\frac{\underbrace{\frac{k_cA}{1+k_cA}}_{A_1}}{\underbrace{\frac{\tau}{1+k_cA}}_{\tau_1}s+1}$$

● $A_1=\frac{k_cA}{1+k_cA}$

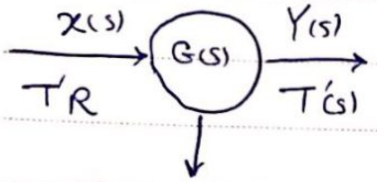
● $\tau_1=\frac{\tau}{1+k_cA}$

قطعاً $\tau_1<\tau$ است

. یعنی در حضور کنترل کننده پاسخ سیستم سریع تر خواهد بود .

Subject:
Date

• اگر یک تغییر پله ای در متغیر Setpoint $\frac{T'}{T'_R} = \frac{A_1}{\tau_1 s+1}$ ایجاد شود پاسخ سیستم $(T'(t))$ به چه شکل خواهد بود؟



$T'_R(t) = u(t) \rightarrow$ ورودی پله واحد $\xrightarrow{\mathcal{L}} T'_R(s) = \frac{1}{s}$

$$\boxed{\frac{T'(s)}{T'_R(s)} = \frac{A_1}{\tau_1 s+1}} \rightarrow T'(t) = ?$$

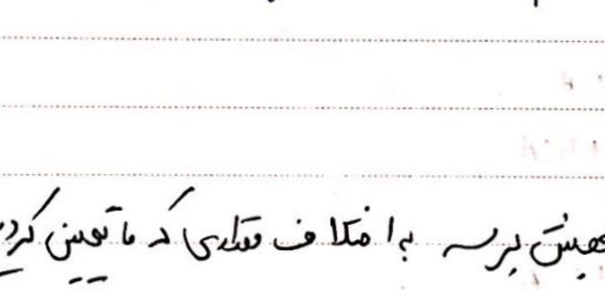
$$T'(s) = \frac{1}{s}\frac{A_1}{\tau_1 s+1} = \frac{a}{s} + \frac{b}{\tau_1 s+1} \Rightarrow *$$

$$* s \Rightarrow s=0 \Rightarrow a = A_1$$

$$* (\tau_1 s+1) \Rightarrow s = \frac{-1}{\tau_1} \Rightarrow \boxed{b = -A_1\tau_1}$$

$$* \Longrightarrow \frac{A_1}{s} - \frac{A_1\tau_1}{\tau_1 s+1} = \frac{A_1}{s} - \frac{A_1}{s+\frac{1}{\tau_1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} T'(t) = A_1(1-e^{-t/\tau_1})$$

رسم:



$$A_1 = \frac{K_c A}{1+K_c A} < 1$$

• کنترلر تناسبی همیشه offset دارد.

ما یک متغیری را مشخص می کنیم دستگاه نتوانسته بهش برسه با اختلاف متغیری که ما تعیین کردیم

و متغیری که دستگاه رسیده بهش offset می گویند. $offset = R(\infty) - C(\infty)$ فرم کلی

در اینجا $offset = R(\infty) - T'(\infty)$

Subject :
Date

حالت کلی : $k_c \uparrow$: offset $\downarrow$

حالت ② : سیستم Regular با کنترلر تناسبی :

$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{A^{-1}\frac{A}{\tau s+1}}{1+\frac{k_cA}{\tau s+1}} = \frac{1}{\tau s+1+k_cA} = \frac{\frac{1}{1+k_cA}}{\frac{\tau}{1+k_cA}s+1}$$

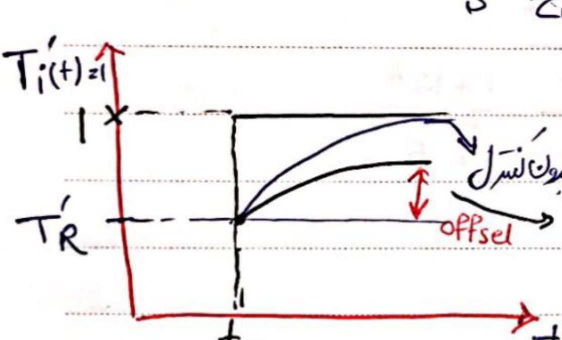
$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{A_2}{\tau_2 s+1}$$

- $A_2 = \frac{1}{1+k_cA}$
- $\tau_1 = \frac{\tau}{1+k_cA}$

• پاسخ سیستم را به ازای تغییر پله‌ای واحد ($T_i(t)$) به دست آورید.

$$T_i'(t) = u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T_i'(s) = \frac{1}{s}$$

$$\longrightarrow T'(s) = \frac{1}{s}\,\frac{A}{\tau_1 s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} T'(t) = A_2\left(1-e^{-t/\tau_1}\right)$$



با کنترلر تناسبی

$A_2 = \frac{1}{1+k_cA}$

هرچه

Subject :
Date

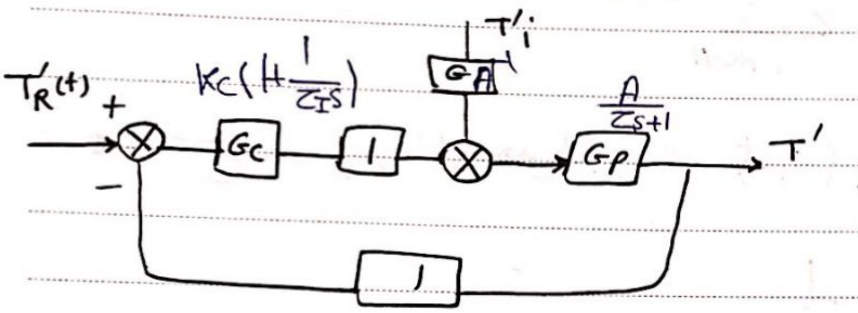
ب)

حالت ① : کنترلر تناسبی ـ انتگرالی در سیستم servo :

servo
$\begin{cases} R \neq 0 \\ L = 0 \end{cases}$

در اینجا $\begin{cases} T'_R \neq 0 \\ T'_i = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\frac{T'}{T'_R} = \frac{\overbrace{K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)}^{G_c} * \overbrace{\frac{A}{\tau s+1}}^{G_p}}{1 + \underbrace{K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)\frac{A}{\tau s+1}}_{G_{op}}} = \frac{\tau_I s+1}{\tau_1^2 s^2 + 2\xi \tau_1 s + 1}$$



$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\tau \tau_I}{K_c A}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}}\,\frac{1+K_c A}{\sqrt{K_c A}}$$

تعیین مقدار نهایی

$T'(t=\infty) =$

$T'_R(t) = u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T'_R(s) = \frac{1}{s}$

$$T'(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\tau_I s+1}{\tau_1^2 s^2 + 2\xi \tau_1 s+1}\right)$$

سیستم کنترلر انتگرالی ـ تناسبی offset ندارد.

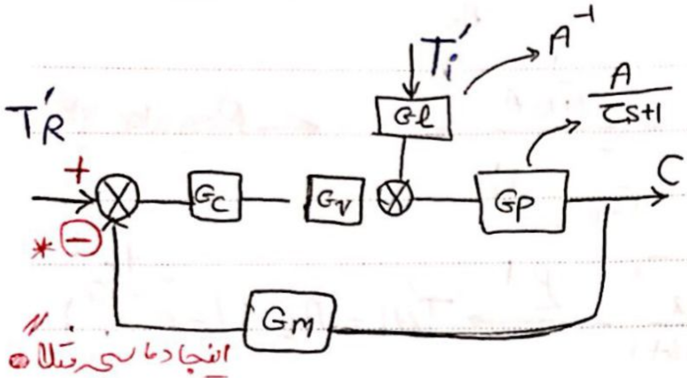
$T'(t=\infty) = 1$

$\text{offset} = T'_R - T'(\infty) = 0$

Subject :
Date

جلسه ۱۰: نیم ترم.

جلسه ۱۱:



$$G_p = \frac{1}{\tau s+1}$$

$$\frac{T'(s)}{T_R'(s)} = \frac{G_c G_v G_p}{1 + \underbrace{G_c G_v G_p G_m}_{G_{OL}}} \longrightarrow \text{servo} \begin{cases} T_i' = 0 \\ T_R' \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{G_L G_p}{1+G_{OL}} \longrightarrow \text{Regulor} \begin{cases} T_R' = 0 \\ T_i' \neq 0 \end{cases}$$

$$G_m = \frac{1}{\tau_m s+1} \qquad \tau_m \ll \;\rightarrow\; G_m = 1$$

الف- اگر کنترلر تناسبی باشد تابع $G_c(S) = k_c$ می شود.

ورودی پله ای

$$\frac{T'(s)}{T_R'(s)} = \frac{k_c \frac{A}{\tau s+1}}{1 + k_c \frac{A}{\tau s+1}} \times \frac{\tau s+1}{\tau s+1} = \frac{k_c A}{\tau s + 1 + k_c A} = \frac{\frac{k_c A}{1+k_c A}}{\frac{\tau}{1+k_c A} s + 1} \longleftarrow \text{servo}$$ ۱)

$$\Rightarrow \frac{A_1}{\tau_1 s+1} \checkmark \Longrightarrow T'(s) = \frac{1}{s}\,\frac{A_1}{\tau_1 s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} T'(t) = A_1\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{offset} &= R(\infty) - C(\infty) \\ &= T'_R(\infty) - T'(\infty) \\ &= 1 - A_1 \end{aligned}$$

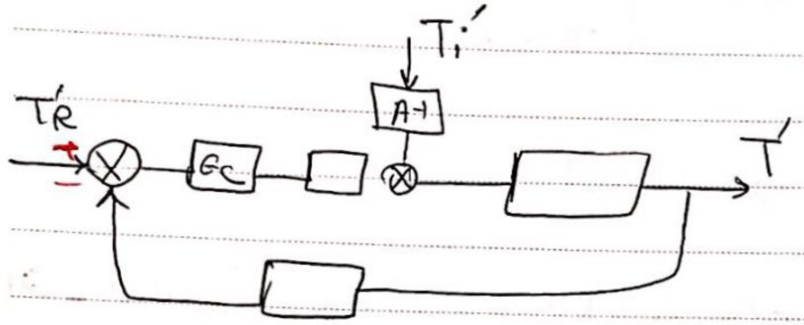
$$\frac{T'}{T_i'} = \frac{\frac{1}{\tau s+1}}{1+K_C\frac{A}{\tau s+1}} = \frac{1}{\tau s+1+K_C A} = \frac{\overbrace{\frac{1}{1+K_C A}}^{A_2}}{\underbrace{\frac{\tau}{1+K_C A}}_{\tau_1} s+1} = \leftarrow \text{Regular (2}$$

$$\frac{A_2}{\tau_1 s+1} \xrightarrow{T_i'=\frac{1}{s}} T'(s) = \frac{1}{s}\,\frac{A_2}{\tau_1 s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} T'(t) = A_2\left(1-e^{-t/\tau_1}\right)$$

$$\text{offset} = T'_R(\infty) - T'_\infty$$

$$= 0 - A_2 = -A_2 = \frac{-1}{1+K_C A} \Rightarrow K_C\uparrow : \text{offset}\downarrow$$

ب- کنترلر تناسبی - انتگرالی :
ورودی پله ای



$$\text{Servo}\begin{cases} T_i' = 0 \\ T_R' \neq 0 \end{cases} \qquad \frac{T'(s)}{T_R'} = \frac{K_C\left(1+\frac{1}{\tau s+1}\right)\frac{A}{\tau s+1}}{1+K_C\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)\frac{A}{\tau s+1}} = \frac{K_C\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)A}{\tau s+1+K_C\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)A}$$

$\longrightarrow$ درنهایت $\Rightarrow$ $$\frac{\tau_I s+1}{\tau_1^2 s^2+2\zeta\tau_1 s+1} \qquad \tau_1 = \sqrt{\frac{\tau\tau_I}{K_C A}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{2}}\,\frac{1+K_C A}{\sqrt{K_C A}}$$

$$T'(s) = \frac{1}{s} * \frac{\tau_I s+1}{\tau_1^2 s^2+2\zeta\, s+1} \qquad \text{offset} = T'_R(\infty) - T'(\infty) = 1-1 = 0$$

قضیه نهایی $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{s\to 0} sT(s)$

Subject :
Date

Regular $\begin{cases} T'_R = 0 \\ T'_i \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{T'}{T'_i} = \frac{\frac{1}{\tau s+1}}{1+k_C\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)\frac{A}{\tau s+1}} =$$

$$\frac{1}{\tau s+1+k_C\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)A} = \frac{A_1 s}{\tau_1^2 s^2+2\xi\tau_1 s+1}$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\tau\tau_I}{k_C A}}$$

بعد از قضایای * S و ‎S→0

$$A_1 = \frac{\tau_I}{k_C A} \qquad T'(s) = \frac{1}{s} * \left(\frac{A_1 s}{\tau_1^2 s^2+2\xi\tau_1 s+1}\right)$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}}\,\frac{1+k_C A}{\sqrt{k_C A}}$$

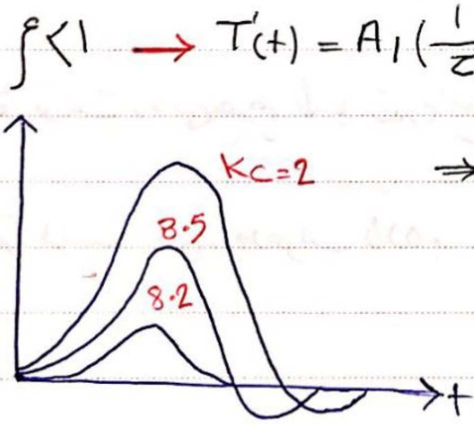
$$\text{offset} = T'_R(\infty) - T'(\infty) = 0 - 0$$

چون ξ وابسته به k_C و τ_I می‌باشد به ازای مقادیری از k_C و τ_I می‌تواند باشد.

$$\begin{cases} \xi < 1 \\ \xi = 1 \\ \xi > 1 \end{cases}$$

ـ نیازی به مقاومت نیست.

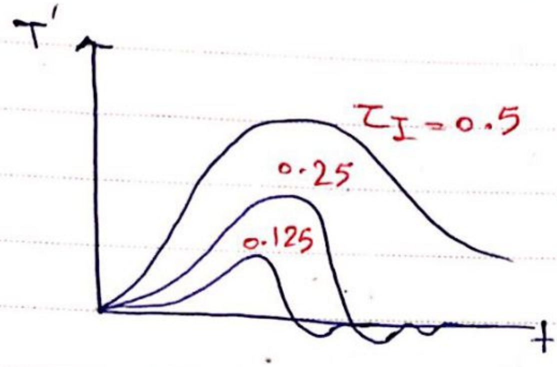
$$\text{if } \xi < 1 \rightarrow T'(t) = A_1\left(\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\frac{\xi t}{\tau_1}} \sin\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau_1}\right)$$



اگر $k_C \uparrow$ کنیم سیستم زودتر به مقدار نهایی می‌رسد ⇒

و جواب می‌دهد.

Subject:
Date



هرچی τ_I کوچیک باشد سیستم زودتر جواب می‌دهد ⇐

● دیگه تابع اندازه گیر (τ_m) را یک نمی‌گیریم.

ج ـ کنترلر تناسبی باشد (P) ، عنصر اندازه گیر داشته باشیم. ورودی پله ای واحد.

1) servo :

$$\frac{T'}{T'_R} = \frac{K_c \frac{A}{\tau s+1}}{1+K_c \frac{A}{\tau s+1}\frac{1}{\tau_m s+1}} = \frac{A_1(\tau_m s+1)}{\tau_2^2 s^2 + 2\xi_2 \tau_2 s + 1}$$

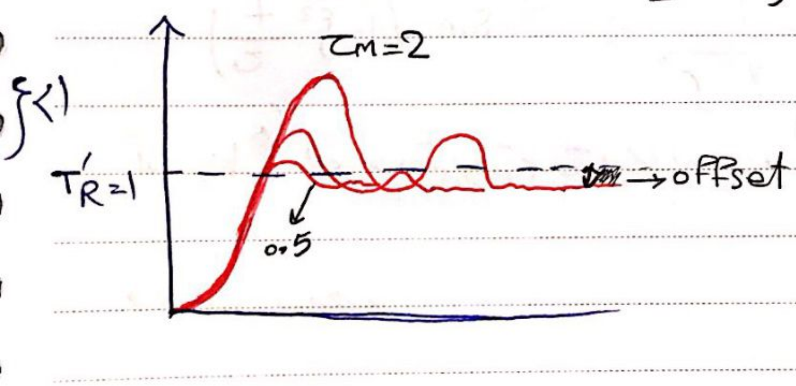
$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\tau\tau_m}{1+K_cA}}$$

$\text{offset} = 1 - A_1$ ⇐ کنترلر تناسبی باشد offset ظاهر می‌شود.

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\tau+\tau_m}{\sqrt{\tau\tau_m}}\frac{1}{\sqrt{1+K_cA}}$$

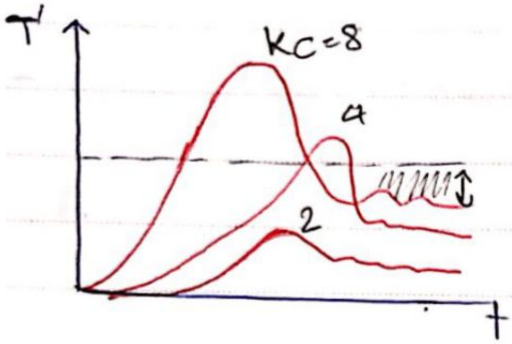
$$A_1 = \frac{K_cA}{1+K_cA}$$

● ξ تابعی از K_c و τ_m است. به ازای $\xi<1$ داریم:



ـ τ ثابت زمانی هرچی ↓ باشد به نفع کنترلر است یعنی زود جواب داده.

Subject:
Date



$Kc\uparrow$: offset$\downarrow$

نکته: در یک سیستم درجه ۲ با افزایش Kc offset کاهش اما سیستم نوسانی می‌شود.

● **پایداری سیستم:**

* در یک سیستم کنترلی که تابع تبدیل آن به فرم:

$$\frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} = 0 \quad t \to \infty$$

مقدار دارد پایدار.

$$\frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{t} = \infty \quad t \to \infty$$

$\boxed{s = +1}$ ناپایدار.

$$G(s) = \frac{A}{(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)}$$

باشد اگر ریشه قسمت حقیقی مثبت داشته باشد سیستم ناپایدار است.

$$\frac{10}{2s^2+7s+5}$$

$$r_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow r_1 = \ominus, \quad r_2 = \ominus$$

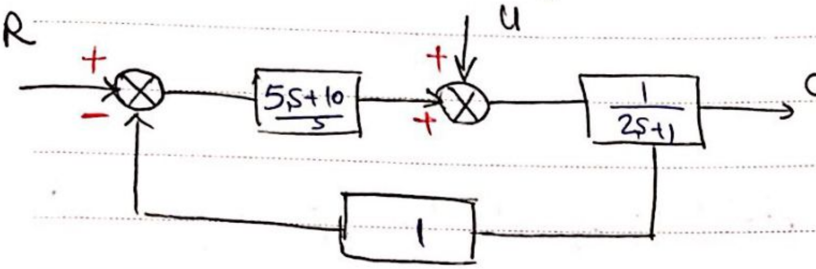
سیستم پایدار است.

- اگر حتی مقدار یکی از ریشه‌ها هم ⊕ باشد باز سیستم را ناپایدار می‌کند.

Subject:
Date

— برای بررسی پایداری سیستم معادله‌ی مشخصه‌ی $1+G_{ol}=0$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال):



$$G_{ol} = \left(\frac{5s+10}{s}\right)\left(\frac{1}{2s+1}\right) = \frac{5s+10}{2s^2+s} \quad +1=0$$

$$5s+10 = -2s^2 - s$$

$$2s^2+s+5s+10=0$$

$$2s^2+6s+10=0 \qquad r_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{-44}}{4}$$

جزء موهومی دارد هم خوانی است.

قسمت حقیقی ⊖ است پس پایدار ه

جلسه 12 :

پایداری سیستم:

$$\overline{(s-r_1)(s-r_2)\cdots}$$

مقدار حقیقی ریشه (+) ← سیستم ناپایدار

$$r_1=+1 \qquad \frac{}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{+t} \qquad t \to \infty \quad e^{+t} \to \infty$$

معادله‌ی مشخصه $1+G_{OL}=0$

• بررسی پایداری سیستم با آزمون Routh :

معادله مشخصه : $1+G_{OL}=0$

به فرم چند جمله‌ای در میاد : $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$

$$\begin{array}{|cccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
a_1 & a_3 & a_5 & \\
b_1 & b_2 & & \\
c_1 & c_2 & & \\
d_1 & d_2 & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

$$\underbrace{1}_{a_0} S^4 + \underbrace{3}_{a_1} S^3 + \underbrace{5}_{a_2} S^2 + \underbrace{4}_{a_3} S + \underbrace{2}_{a_4} = 0$$

۱) نکته: در آزمون Routh حتماً باید a_0 مثبت باشد اگر منفی باید طرفین معادله را در یک منفی ضرب کنیم.

$$\begin{array}{l|lll}
 & 1 & 5 & 2 \\
 & 3 & 4 & 0 \\
 & \frac{15-4}{3} & \boxed{\frac{6-0}{3}} & \\
 & \frac{\frac{11}{3}\times 4 - 6}{\frac{11}{3}} & \boxed{0} & \\
 & 2 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|lll}
 & +1 & 5 & 2 \\
 & +3 & 4 & \\
 & +\frac{11}{3} & 2 & \\
 & +\frac{26}{11} & & \\
 & +2 & &
\end{array}$$

⟸ سیستم پایدار ✓

۲) نکته: اگر مقادیر ستون اول همه مثبت شوند سیستم پایدار است. حتی اگر یک دونه هم منفی باشد سیستم ناپایدار است.

۳) نکته: تعداد ریشه های ناپایدار کننده در آزمون Routh برابر است با تعداد تغییر علامت ها (+ به - و بالعکس)

$$\begin{array}{l|lll}
 & 3 & - & - \\
① & 6 & & - \\
 & -2 & & \\
② & 4 & & -
\end{array}$$

→ s^n → $n+1$ سطر داریم

مثال ۱: پایداری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\underset{a_0}{1}s^5+\underset{a_1}{1}s^4+\underset{a_2}{2}s^3+\underset{a_3}{1}s^2+\underset{a_4}{3}s+\underset{a_5}{5}=0$$

1	2	3
1	1	5
1	-2	
3	5	
$-\frac{11}{3}$		
5		

$n+1$

$$b_1=\frac{2-1}{1}=1$$

$$b_2=\frac{3-5}{1}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$c_1=\frac{1-(-2)}{1}=3.$$

سیستم ناپایدار دارای ۲ ریشه‌ی ناپایدار است.

مثال ۲: معادله‌ی مشخصه‌ی سیستمی به صورت $\underset{a_0}{1}s^3+\underset{a_1}{6}s^2+\underset{a_2}{12}s+\underset{a_3}{72}=0$:

نکته ۴: اگر عناصر سطری همه صفر شد سیستم دارای زوج ریشه است روی محور موهومی که از رابطه‌ی $Cs^2+D=0$ به دست می‌آیند. سطر بالای صفر اون دو تا عدد میشن C و D.

1	12
6 (C)	72 (D)
0	0
0	

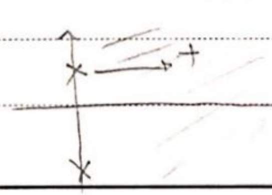
این سیستم مرز پایداری و ناپایداری است و فقط نوسانی است.

$$6s^2+72=0$$

$$s^2=-12$$

$$s=\pm\sqrt{12}\,i=\pm 2\sqrt{3}\,i$$

$$s=0\pm 2\sqrt{3}\,i$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: اگر معادله ی مشخصه ی سیستمی $\underset{a_0}{1S^5} + \underset{a_1}{3S^4} + \underset{a_2}{7S^3} + \underset{a_3}{13S^2} + \underset{a_4}{12S} + \underset{a_5}{4} = 0$

پایدار یا ناپایدار؟

1	7	12
3	13	4
$\frac{8}{3}$	$\frac{32}{3}$	
$\underset{C}{1}$	$\underset{D}{4}$	
0	0	

$$b_1 = \frac{21 - 13}{3} = \frac{8}{3}$$

$$b_2 = \frac{36 - 4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$c_1 = \frac{104/3 - 96/3}{8/3} = \frac{8/3}{8/3} = 1$$

$$c_2 = \frac{32/3 - 0}{8/3} = 4$$

$$S^2 + 4 = 0$$

$$S^2 = -4$$

$$\boxed{S = \pm 2i}$$

مثال ۱: به ازای چه مقادیری از Kc سیستم پایدار خواهد بود؟

box $\to$ Gop ✓ $\to$ 1 + Gop معادله مشخصه

$$\underset{a_0}{\frac{1}{6}} S^3 + \underset{a_1}{1}S^2 + \underset{a_2}{\frac{11}{6}} S + \underset{a_3}{(1+Kc)} = 0$$

$$b_1 = \frac{11/6 - 1/6(1+Kc)}{1} = \frac{11-1-Kc}{6} = \frac{10-Kc}{6}$$

$$b_2 = \frac{1\times 0 - 0}{} = 0 \qquad c_1 = 1+Kc$$

$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$
1	1+Kc
$\frac{10-Kc}{6}$	0
1+Kc	

برای این ستون اول حتماً ⊕ باشد باید

$$\frac{10-Kc}{6} > 0 \quad 10-Kc > 0 \to 10 > Kc$$

• رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

$$1 + G_{ol} = 0$$

$$G_{ol} = K\frac{N}{D} = K\frac{(S-Z_1)(S-Z_2)\cdots(S-Z_m)}{(S-P_1)(S-P_2)\cdots(S-P_n)}$$

ریشه توی صورت Z
ریشه توی مخرج P

$$\frac{K(S-1)}{S(S+1)(S+2)}$$

$Z_1 = 1$

$P_1 = 0$

$P_2 = -1$

$P_3 = -2$

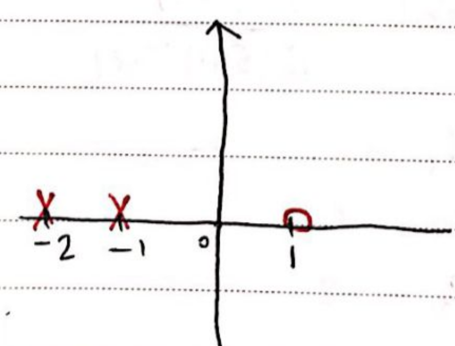
ریشه‌های صورت : صفر (Zero)
(ریشه‌های N)

m: تعداد صفرها

* صفرها را با علامت O نشان می‌دهیم.

ریشه‌های مخرج : قطب می‌نامیم. (Pole)
(ریشه‌های D)

n: تعداد قطب‌ها



* قطب‌ها را با X نشان می‌دهیم.

● قوانین رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

۱) تعداد شاخه‌ها (مکان هندسی) برابر تعداد قطب‌هاست (n). ۳ شاخه. $\frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$

۲) شاخه‌ها از قطب شروع شده و به صفر ختم می‌شوند. $G_{ol} = k\frac{N}{D}$

معادله مشخصه $1+G_{op}=0$ $1+k\frac{N}{D}=0$ $k\frac{N}{D}=-1$ $k=-\frac{D}{N}$

در قطب‌ها $k=0$

در صفرها $k=\infty$

تعداد $(n-m)$ شاخه به سمت مجانب در بی‌نهایت میل می‌کند.

۳) مختصات هم‌رأسی مجانب‌ها برابر است با $\sigma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$

$$G_{ol} = \frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)} \qquad \sigma = \frac{-3-1}{3-1} = -\frac{4}{2} = -2$$

مجانب.

$P_1 = 0 \qquad Z_1 = 1$

$P_2 = -1$

$P_3 = -2$

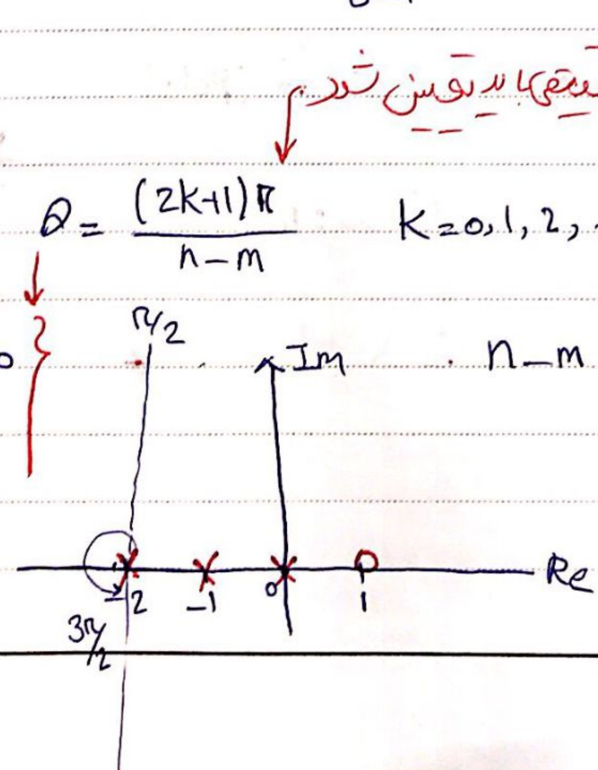
زاویه‌ی مجانب با محور حقیقی‌ها با این روش شود

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k=0,1,2,\dots$$

- تعداد مجانب‌ها: $n-m$

$\frac{\pi}{2}$ $k=0$

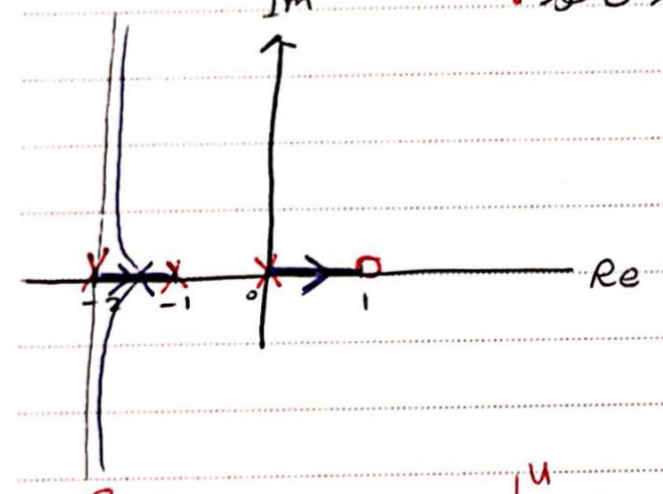
$\frac{3\pi}{2}$ $k=1$



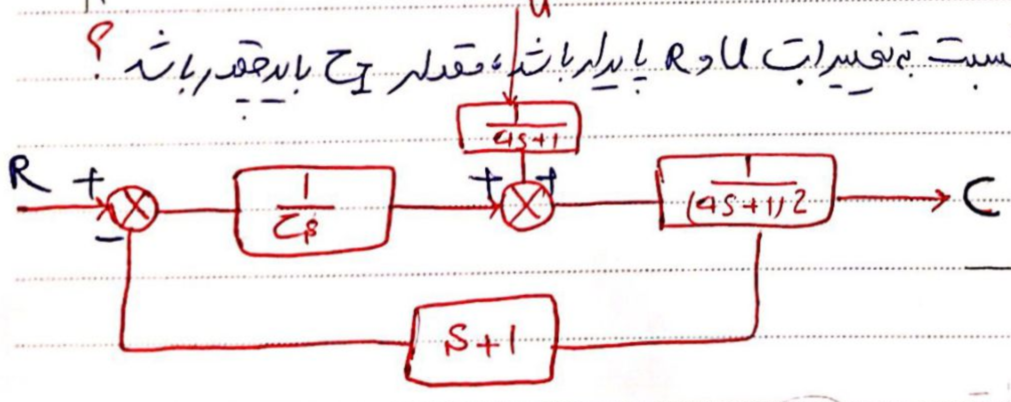
۱۴) اگر تعداد صفرها و قطب ها سمت راست نقطه ای از محور حقیقی فرد باشد آن بخش از محور حقیقی جزء مکان هندسی ریشه ها خواهد بود.

✓ ریشه هایی موهومی هستند حساب نمی شوند.

✓✓ اگر ریشه ای دوبار تکرار شده باشد، دوبار شمرده می شود.



تمرین: برای این که C نسبت به تغییرات U و R پایدار باشد، مقدار τ_I باید چقدر باشد؟



s^3	$16\tau_I$	τ_I+1
s^2	$8\tau_I$	1
s^1	τ_I-1	0
s^0	1	

$1 + G_{OL} = 0$

$\tau_I - 1 > 0 \quad \tau_I > 1 \leftarrow \oplus$

$$1 + \frac{s+1}{\tau_I s(4s+1)} = 0 \longrightarrow 16\tau_I s^3 + 8\tau_I s^2 + (\tau_I+1) + 1 = 0$$

آزمون روث

جلسه 13 :

مکان هندسی ریشه ها:

$$G_{OL} = K\frac{N}{D}$$

معادله مشخصه $1+G_{OL}=0$

$$1+K\frac{N}{D}=0$$

$$\longrightarrow K = -\frac{D}{N}$$

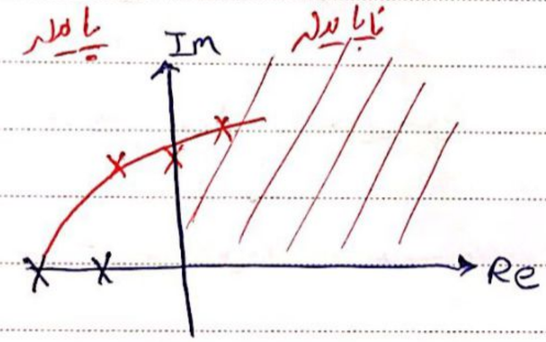
$$|K| = \frac{|D|}{|N|}$$

6
11
60−K

$K>60$ پایدار

$K<60$ ناپایدار

$K=60$ مرز



$$\frac{K}{(s+1)(s+2)} \qquad 1+\frac{K}{(s+1)(s+2)}=0$$

$s=-1$

$s=-2$

$$s^2+2s+2+\underline{K}=0$$

s_1 و s_2 $\propto K$

5) نقطه ی جدایی یا وصل: نقطه‌ای است که در آن ۲ مکان هندسی از قطب های مجاور روی محور حقیقی شروع شده و پس از برخورد محور حقیقی را ترک می کنند.

✓ زاویه‌ی ترک یا ورود محور حقیقی $\pm\frac{\pi}{2}$ است در نقطه‌ی جدایی یا وصل.

✓✓ مختصات نقطه‌ی جدایی از محور حقیقی از رابطه‌ی $\sum\frac{1}{s-P_j}=\sum\frac{1}{s-P_i}$ به دست می آید.

$$\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \longrightarrow \sum \frac{1}{s-P_j} = \sum \frac{1}{s-P_i}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+1}$$

• ریشه ی تابع میشود که بین ۲ قطب باشد.

6) زاویه ی ترک یا میل: اگر یک قطب q بار تکرار شده باشد زاویه ی ترک مکان هندسی ها از
(Pa)

آن قطب برابر است با:

$$\theta = \frac{1}{q}\left[(2k+1)\pi + \sum \measuredangle(P_a - Z_i) - \sum \measuredangle(P_a - P_j)\right]$$

$P = a + bi \qquad |P| = \sqrt{a^2+b^2}$

$P = -2 \quad b = 0$

$|P| = 2$

$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{b}{a} = \theta$

$\theta = 0$

- اگر یک صفر x بار تکرار شده باشد تعداد x مکان هندسی به آن وارد می شوند زاویه ی ورود مکان
(Za)
هندسی ها از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\theta = \frac{1}{x}\left[(2k+1)\pi + \sum \measuredangle(Z_a - P_j) - \sum \measuredangle(Z - Z_i)\right]$$

Subject :
Date

مثال) مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنید.

$$G_{OL} = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad N=1 \quad D$$

قطب‌ها

$p=-1$ صفر هم نداریم

$p=-2$

$p=-3$

$s=-1$

$s=-2$

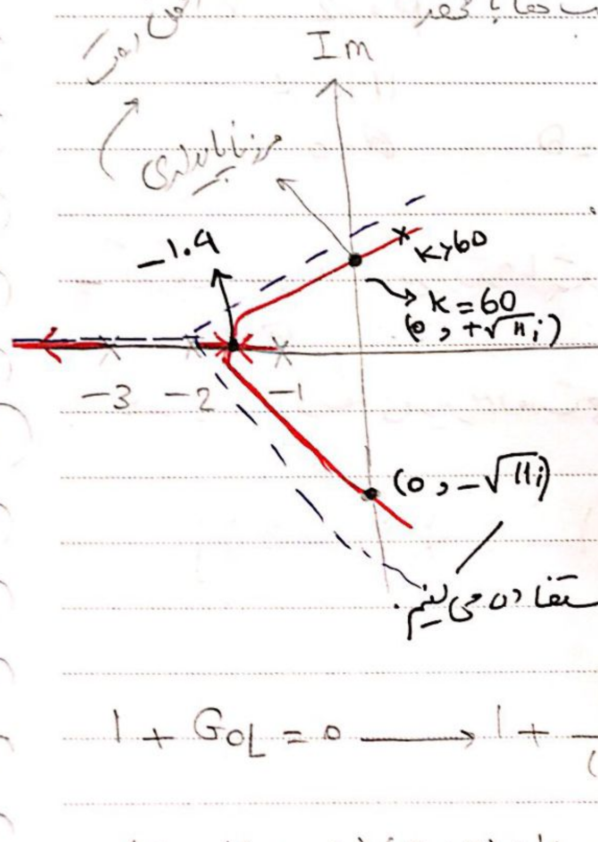
$s=-3$

تعداد مجانب‌ها : $n-m=3$ مجانب داریم که به هم می‌رسند.

مکان مجانب‌ها / محل برخورد مجانب‌ها : $\sigma = \frac{-6-0}{3} = -2$

زاویه‌ی مجانب‌ها با محور : $\theta = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} \xrightarrow{K=0} \frac{\pi}{3}$, $\xrightarrow{K=1} \pi$, $\xrightarrow{K=2} \frac{5\pi}{3}$

از -2 با 3 مجانب این زاویه‌ها بکش



به ازای برخی از k ها سیستم ناپایدار
" " " " پایدار
اما در کل ناپایدار است.

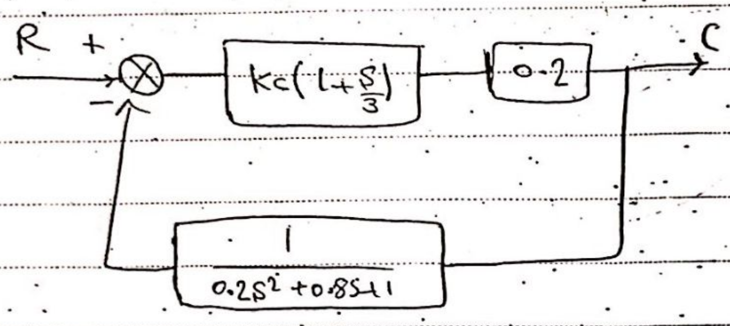
- برای به دست آوردن مرز ناپایداری از جدول روت استفاده می‌کنیم.

$$1 + G_{OL} = 0 \longrightarrow 1 + \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\underbrace{(s+1)(s+2)}_{s^2+3s+2}(s+3) + k = 0 \qquad s^3 + 3s^2 + 2s + 3s^2 + 9s + 6 + k = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k = 0$$

مثال ۱: مکان هندسی ریشه ها را رسم کنید.



$$G_{ol} = K_c\left(1+\frac{s}{3}\right)(0.2)\left(\frac{1}{0.2s^2+0.8s+1}\right) = \frac{K_c\left(\frac{3+s}{3}\right)2}{2s^2+8s+10} =$$

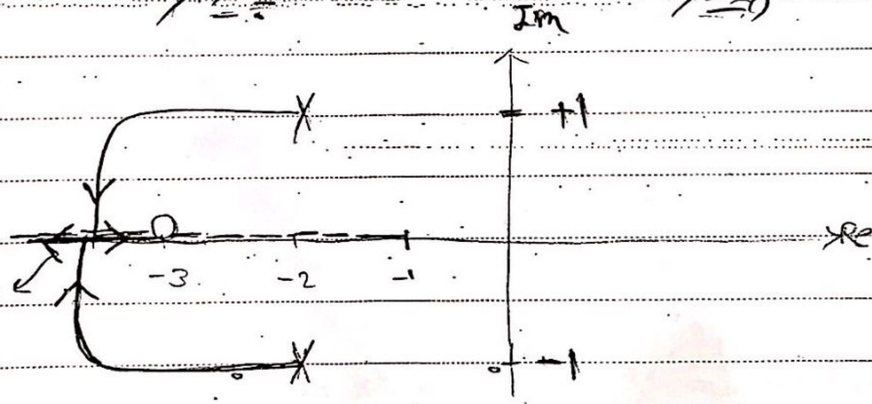
$$\frac{\frac{2}{3}K_c(s+3)}{(s+2-j)(s+2+j)} \qquad S_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-80}}{4} = -2 \pm j$$

صفر $z_1 = -3$

قطب $P_1 = -2-j$

$P_2 = -2+j$

پایدار ناپایدار



همه‌ی این نقاط سمت راست ۱ صفر است

پس جزء مکان هندسی هستند

سیستم همواره پایدار است

$n - m = 2 - 1 = 1$

$\theta = k = 0 \longrightarrow \pi = \theta$

$\sigma = -$

Subject:
Date

	1	11
$6s^2+6s=0$	6	$6+k$
$s=\pm\sqrt{11}i$	$\frac{60-k}{6}$	0

$60-k>0 \rightarrow$ پایداری

$60>k \rightarrow$ پایدار

اگر $k>60 \longrightarrow$ سیستم ناپایدار

پس مرز پایداری ناپایداری 60 است

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}=0$$

$$s^2+5s+6+s^2+4s+3+s^2+3s+2=0$$

$$3s^2+12s+11=0$$

نقطه جدایی

$$S_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-132}}{6}$$

$$S_{1,2} \begin{cases} -2+\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -1,4 \\ -2-\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -2,6 \end{cases}$$

غ ق چون بین دو قطب نیست

k در نقطه جدایی : $1+G_{ol}=0$

$$1+k\frac{N}{D}=0 \longrightarrow K=-\frac{D}{N} \qquad |K|=\frac{|D|}{|N|}$$

-1.4

$$=\frac{|s+1||s+2||s+3|}{1}$$

$$|k|=0.4\times0.6\times1.6=0.384$$

Subject:
Date

K را بخواهیم ابتدا مختصات نقطه‌ی وصل سیستم در رابطه‌ی اندازه‌ی K قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+2-j} + \frac{1}{s+2+j}$$

نمودار بُد (Bode):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow y(t)$$

نموداری است که A.R (نسبت دامنه) و Φ برحسب ω (فرکانس) رسم می‌شود.

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$\longrightarrow y(t) = \underbrace{A}_{\text{دامنه}} \sin(\omega t + \underbrace{\Phi}_{\text{فاز}})$$

مراحل رسم نمودار بُد:

① $s = i\omega$

② $c + di = G(i\omega)$

$$A.R = |G(i\omega)| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\Phi = \measuredangle G(i\omega) = \tan^{-1} \frac{d}{c}$$

PAPCO

مثال): نمودار بُد سیستم درجه 1 :

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau\omega i+1} * \frac{\tau\omega i-1}{\tau\omega i-1}$$

* مزدوج

$$G(i\omega) = \frac{\tau\omega i-1}{-\tau^2\omega^2-1} *\ominus = \frac{1-\tau\omega i}{1+\tau^2\omega^2} = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} - \frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\, i$$

$i^2=-1$

$$AR = \sqrt{\frac{1}{(1+\tau^2\omega^2)^2} + \frac{\tau^2\omega^2}{(1+\tau^2\omega^2)^2}}$$

$$AR = \sqrt{\frac{1+\tau^2\omega^2}{(1+\tau^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}}$$

رابطه

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}}{\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}}\right) = \tan^{-1}(-\tau\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$