فصل ۱: توابع چند متغیره

توابع چند متغیره

تاکنون با توابع حقیقی یک متغیره آشنا شده ایم. اگرچه بسیاری از پدیده ها را توسط این توابع توصیف می شوند، ولی اغلب کمیت های فیزیکی و اقتصادی در واقع به بیش از یک متغیر وابسته هستند. به عنوان مثال حجم مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع آن بستگی دارد. هزینه کل یک واحد صنعتی بستگی به حقوق کارکنان ، مواد اولیه ، تجهیزات و .... است. هر تابع که با چند متغیر وابسته است را تابع چند متغیره می نامند. در این فصل با این توابع و ویژگی های آنها آشنا شده و در ادامه به تعمیم مفهوم مشتق و کاربرد های آن می پردازیم.

تعریف : اگر R مجموعه ی اعداد حقیقی باشد. هر تابع که دامنه ی آن R^n و برد آن R را یک تابع n متغیره می نامند. به عبارتی ساده تر تابع n متغیره ی ، به تعداد n عدد مرتب حقیقی می گیرد و یک یک عدد حقیقی می دهد. برای مثال:

$y = f(x)$ تابع یک متغیره

$y = f(x_1, x_2)$ تابع دو متغیره

$y = f(x_1, x_2, x_3)$ تابع سه متغیره

مثال : تابع $f(x,y) = 3x^2 - 4y$ یک تابع دو متغیره است. مقدار $f(1,2)$ را بدست آورید.

$$f(1,2) = 3(1)^2 - 4(2) = 3 - 8 = -5$$

تمرین : تابع سه متغیره ی $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - 3z + 1$ را در نظر بگیرید.مقدار $f(10,5,1)$ را محاسبه کنید.

$$f(10,5,1,) = \frac{10}{5} - 3(1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

همانطور که انتظار می رود ، دامنه ی یک تابع چند متغیره زیر مجموعه ای از R^n می باشد، به شرط اینکه به ازای تمام اعضای آن تابع داده شده تعریف شده باشد.

مثال : دامنه ی تابع $f(x,y) = \frac{x+3}{y-1}$ مجموعه ی $D_f = \{(x,y) \in R^2 \mid y \neq 1\}$ می باشد. زیرا مخرج کسر نباید صفر شود.

تذکر : در این فصل فقط به بررسی توابع دو متغیره می پردازیم و در مواردی محدود به توابع سه متغیره اشاره می کنیم.

تمرین : تابع $f(x,y)=\frac{1}{x-y}$ را در نظر بگیرید.

الف : مقدار $f(6,4)$ را محاسبه کنید.

ب : دامنه ی این تابع را تعیین کنید.

حل :

$$f(6,4)=\frac{1}{6-4}=\frac{1}{2}$$

$$D_f=\{(x,y)\in R^2 \mid x\neq y\}$$

تمرین : تابع $f(x,y)=\sqrt{x}+3y$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

ب) مقدار $f(4,1)$ را حساب کنید.

حل : زیر رادیکال نباید منفی باشد.پس :

$$D_f=\{(x,y)\in R^2 \mid x\geq 0\}$$

$$f(4,1)=\sqrt{4}+3(1)=2+3=5$$

تمرین برای حل :

تمرین : تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ را در نظر بگیرید.

الف : مقدار $f(5,-1)$ را محاسبه کنید.

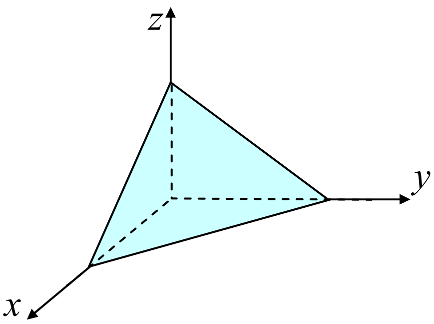
ب : دامنه ی این تابع را تعیین کنید.

***

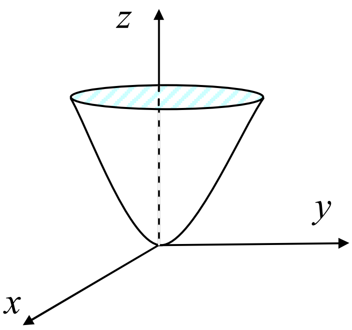
نمودار توابع دو متغیره

نمودار توابع دو متغیره فقط در فضای سه بعدی قابل ترسیم است. برای مثال تابع $z=f(x,y)$ دو مقدار برای x و y می گیرد و مقدار برای z می دهد. به همین دلیل نمودار های اینگونه توابع در فضای سه بعدی نمایش داده می شوند. نمودار هر تابع دو متغیره را رویه (و به در حالتی خاص سطح) می نامند. به نمونه های زیر توجه کنید.

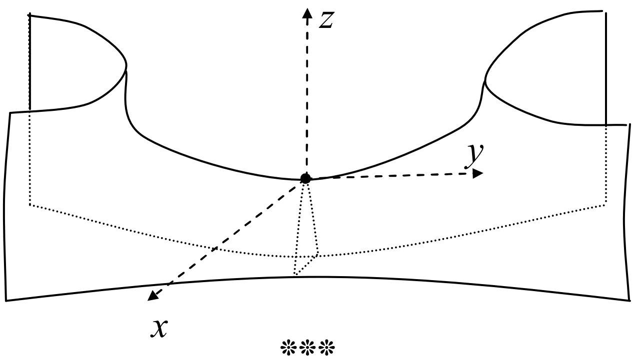
مثال ۱ : نمودار تابع $z=-x-y$ یک سطح می باشد.



مثال ۲ : نمودار تابع $z=x^2+y^2$ یک سهمی گون می باشد.



مثال۳ : نمودار تابع $z=x^2-y^2$ یک هذلولی گون یا رویه ی زین اسبی است.



❋❋❋

حد در توابع دو متغیره

اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. حد این تابع در نقطه ی (a,b) عددی مانند L است، هرگاه وقتی که (x,y) به سمت (a,b) میل کند و مقدار تابع به L نزدیک شود. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

مثال : حد تابع $f(x,y)=x^2+5xy+2y^2$ در نقطه ی $(1,-2)$ را بدست آورید.

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(۱,-۲)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(۱,-۲)} (x^۲ + ۵xy + ۲y^۲) = (۱)^۲ + ۵(۱)(-۲) + ۲(-۲)^۲$$
$$= ۱ - ۱۰ + ۸ = -۱$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{۴x - y}{x + ۳y}$

۲) $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x + ۳y - ۱}{x + y + ۵}$

۳) $\lim_{(x,y)\to(۳,-۴)} \sqrt{x^۲ + y^۲}$

تذکر : اگر در محاسبه ی حد ، پس از جایگذاری مقادیر به حالت $\frac{۰}{۰}$ برسیم، در اصطلاح گویند، حد مبهم است و برای رفع ابهام لازم است قبل از جایگذاری صورت و مخرج کسر را تجزیه و ساده کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)} \frac{x^۲ - y^۲}{x - y}$$

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)} \frac{x^۲ - y^۲}{x - y} = \frac{(۳)^۲ - (۳)^۲}{۳ - ۳} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)} \frac{x^۲ - y^۲}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(۳,۳)} \frac{(x-y)(x+y)}{x - y}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(۳,۳)} (x + y) = ۳ + ۳ = ۶$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{(x,y)\to(-۲,۱)} \frac{x^۲ + ۵xy + ۶y^۲}{x + ۲y}$

۲) $\lim_{(x,y)\to(۱,۱)} \frac{x^۳ - y^۳}{x - y}$

۳) $\lim_{(x,y)\to(۱,۱)} \frac{x^۳ - y^۳}{x^۲ - y^۲}$

پیوستگی در توابع دو متغیره

اگر دو متغیره ی $f(x,y)$ را در نقطه ی (a,b) پیوسته گویند، هرگاه :

الف : مقدار $f(a,b)$ وجود داشته باشد.

ب : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

ج : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ باشد.

در صورتی که حداقل یکی از شرایط فوق برقرار نباشد، گویند تابع در نقطه ی پیوسته (a,b) نیست.

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $(۰,۱)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} x+۲y+۱ & (x,y)\neq(۰,۱) \\ ۳ & (x,y)=(۰,۱) \end{cases}$$

حل :

$$f(۰,۱)=۳$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(۰,۱)}(x+۲y+۱)=۰+۲(۱)+۱=۳$$

لذا تابع داده شده در نقطه ی $(۰,۱)$ پیوسته است.

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $(۱,۲)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^{۲}+y^{۲} & (x,y)\neq(۱,۲) \\ ۲xy & (x,y)=(۱,۲) \end{cases}$$

حل :

$$f(۱,۲)=۲(۱)(۲)=۴$$

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(۱,۲)}(x^{۲}+y^{۲})=(۱)^{۲}+(۲)^{۲}=۱+۴=۵$$

لذا تابع داده شده در نقطه ی $(۱,۲)$ پیوسته نیست.

تمرین برای حل :

۱ : پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی $(۱,۲)$ را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۵xy}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۱,۲) \\ xy & (x,y)=(۱,۲) \end{cases}$$

۲ : پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی $(-۱,۱)$ را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}۱+x^{۲}+y^{۲} & (x,y)\neq(-۱,۱)\\ x^{۲}-y^{۲} & (x,y)=(-۱,۱)\end{cases}$$

***

مشتقات جزیی توابع دو متغیره

در مورد توابع دو متغیره ، با در ثابت در نظر گرفتن یکی از متغیر ها نسبت به متغیر دیگر مانند توابع یک متغیره می توان مشتق گیری نمود. به عبارتی دیگر در مشتق گیری از تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر x ، متغیر y را ثابت در نظر می گیریم. همچنین در مشتق گیری از تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر y ، متغیر x را ثابت در نظر می گیریم. به همین دلیل است که تابع بدست آمده را مشتق جزئی مرتبه ی اول (مشتق نسبی مرتبه ی اول) می نامند.

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. در این صورت مشتق این تابع نسبت به x را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f_x و مشتق این تابع نسبت به y را با نماد $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا f_y نمایش می دهند. لذا

$\frac{\partial f}{\partial x}=$ مشتق نسبت به x (y عدد فرض می شود.)

$\frac{\partial f}{\partial y}=$ مشتق نسبت به y (x عدد فرض می شود.)

مثال۱ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x,y)=۳x+۲y+۴xy+e^{x}-e^{y}+۱$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳+۴y+e^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۲+۴x-e^{y}$$

مثال۲ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x,y)=۵x^{۲}y^{۳}-\sin x+\cos y$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۱۰xy^{۳}-\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۱۵x^{۲}y^{۲}-\sin y$$

تمرین : مشتقات جزئی تابع $f(x,y)=x^{۳}-۴xy$ را در نقطه ی $(۱,۲)$ بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳x^{۲}-۴y\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۲)=۳(۱)^{۲}-۴(۲)=۳-۸=-۵$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-۴x\rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۲)=-۴(۱)=-۴$$

تذکر : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع سه متغیره نیز به همنی ترتیب تعریف می شود.

مثال : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+۲x-۳y+z+۲$$

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۲$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۱}{۲\sqrt{y}}-۳$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{۱}{۲\sqrt{z}}+۱$$

تمرین برای حل :

۱ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x,y)=xe^{y}+xy^{۲}$

۲) $f(x,y)=۳+x^{۲}y^{۲}+e^{xy}$

۳) $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(xy)$

۴) $f(x,y,z)=x\sin y+y\sin x+L_{n}z$

۲ : مشتقات جزیی تابع $f(x,y)=L_{n}(x^{۲}+۴y)$ را در نقطه ی $(۳,۲)$ بدست آورید.

۳ : مشتقات جزیی تابع $f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+xyz$ را در نقطه ی $(۱,۲,۳)$ بدست آورید.

یک مسئله ی کاربردی : اگر تابع هزینه‌ی مشترک برای مقادیر x و y از دو کالا به صورت $c(x,y)=۵+۳x^{۲}-xy+۴y^{۲}$ تعریف شده باشد. هزینه نهایی دو کالا را طوری بدست آورید که $x=۴$ و $y=۵$ باشد.

$\frac{\partial c}{\partial x}=$ هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای x

$\frac{\partial c}{\partial y}=$ هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای y

$\frac{\partial c}{\partial y}(۴,۵)=(۶x-y)\Big|_{(۴,۵)}=۶(۴)-(۵)=۲۴-۵=۱۹$ هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای x

$\frac{\partial c}{\partial y}(۴,۵)=(-x+۸y)\Big|_{(۴,۵)}=-۴+۸$ هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای y

تمرین برای حل : اگر تابع هزینه‌ی مشترک برای مقادیر x و y از دو کالا به صورت زیر تعریف شده باشد. هزینه نهایی دو کالا را طوری بدست آورید.

$$c(x,y)=۲xe^{۳y}$$

یک مسئله ی کاربردی : اگر تابع تولید محصولی به صورت $z(x,y)=۸xy-۲x^{۲}+۴y^{۲}$ تعریف شده باشد. بهره وری نهایی x و y بدست آورید.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$ (بهره وری نهایی نسبت به x) تولید نهایی نسبت به x

$\frac{\partial z}{\partial y}=$ (بهره وری نهایی نسبت به y) تولید نهایی نسبت به y

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۸y-۴x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=۸x-۸y$$

تمرین برای حل : بهره وری نهایی تابع $z(x,y)=۳xy-x^{۲}-۳y^{۲}$ را در نقطه‌ی $(۱,۲)$ را بدست آورید.

***

مشتقات جزئی مراتب بالاتر :

می توان عمل مشتق گیری را روی مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول نیز انجام داد. در این صورت مشتقات جزئی مرتبه ی دوم بدست می آیند. با ادامه ی روند مشتقگیری می توان مشتقات جزئی مراتب بالاتر را نیز می توان به دست آورد. توجه داشته باشید که :

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ ابتدا از تابع f نسبت به y و سپس از تابع بدست آمده نسبت به x مشتق می گیریم.

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ ابتدا از تابع f نسبت به x و سپس از تابع بدست آمده مجدداً نسبت به x مشتق می گیریم.

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ ابتدا از تابع f نسبت به y و سپس از تابع بدست آمده مجدداً نسبت به y مشتق می گیریم.

مثال : اگر $f(x,y) = ۶x^۲ y - ۴xy + ۴y^۲$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{\partial f}{\partial x} = ۱۲xy - ۴y$

ب) $\frac{\partial f}{\partial y} = ۶x^۲ - ۴x + ۸y$

ج) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = ۱۲x - ۴$

د) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = ۱۲x - ۴$

هـ) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = ۱۲y$

و) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۸$

تمرین برای حل

۱ : اگر $f(x,y)=x^{۲}-۲xy+۳y^{۲}$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}=$

ب) $\frac{\partial f}{\partial y}=$

ج) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x\partial y}=$

د) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y\partial x}=$

هـ) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=$

و) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=$

۲ : اگر $f(x,y)=x^{۳}y^{۳}+\sin x$ مقدار $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y\partial x}$ را در نقطه ی $(-۱,۲)$ بدست آورید.

۳ : اگر $f(x,y)=x^{۳}y^{۳}z^{۲}$ مقدار $\frac{\partial^{۳} f}{\partial z\partial y\partial x}$ را بدست آورید.

***

دیفرانسیل کامل توابع دو متغیره

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. در این صورت دیفرانسیل کامل این تابع را به صورت زیر تعریف می شود.

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

مثال۱ : دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y)=xe^{y}+ye^{x}$ را بدست آورید.

حل :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$df=(e^{y}+ye^{x})dx+(xe^{y}+e^{x})dy$$

مثال۲ : دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y)=۴x^{۲}-۳xy^{۲}$ را در نقطه ی $(۲,-۱)$ بدست آورید.

حل :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$df = (8x - 3y^2)dx + (-6xy)dy$$

$$df\Big|_{(2,-1)} = (8(2) - 3(-1)^2)dx + (-6(2)(-1))dy$$

$$= (16 - 3)dx + (12)dy = 13dx + 12dy$$

تذکر : به طور مشابه برای تابع سه متغیره ی $w = f(x,y,z)$ می توان دیفرانسیل کامل را به صورت زیر تعریف نمود.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال : دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$ را بدست آورید.

حل :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$df = (yz + 2z)dx + (xz + 2y)dy + (xy + 2z)dz$$

تمرین برای حل : دیفرانسیل کامل هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x,y) = 4x^2 + 3xy^2$

۲) $f(x,y) = xe^y + ye^x$

۳) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

***

مشتق کامل توابع دو متغیره (مشتق زنجیری)

در تابع دو متغیره ی $z = f(x,y)$ ، اگر z تابعی مشتق پذیر از دو متغیر x و y بوده و توابع $x = g(t)$ و $y = h(t)$ نیز توابعی مشتق پذیر بر حسب متغیر t باشند. در این صورت z نیز تابعی مشتق پذیر از t بوده و مشتق زنجیره ای آن نسبت به t عبارت است از :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

مثال : اگر $z = x^2 + y^2$ و $x = -t + e^t$ و $y = t + e^t$ باشد. مشتق کامل $\dfrac{dz}{dt}$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=(۲x)\times(-۱+e^{t})+(۲y)\times(۱+e^{t})=۲(-t+e^{t})(-۱+e^{t})+۲(t+e^{t})(t+e^{t})$$

مثال : اگر $z=x^{۲}+۲xy+y^{۲}$ و $x=\sin t$ و $y=\cos t$ باشد. مشتق کامل $\frac{dz}{dt}$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=(۲x+۲y)\times(\cos t)+(۲x+۲y)\times(-\sin t)$$

$$=۲(\sin t+\cos t)(\cos t)+۲(\sin t+\cos t)(-\sin t)$$

$$=۲\sin t\cos t+۲\cos^{۲}t-۲\sin^{۲}t-۲\sin t\cos t=۲\cos^{۲}t-۲\sin^{۲}t$$

تذکر : بطور مشابه مشتق کل (مشتق زنجیری) برای تابع سه متغیره ی $w=f(x,y,z)$ وقتی که متغیرهای x و y و z برحسب t باشند، تعریف می شود.

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\times\frac{dz}{dt}$$

مثال : با توجه به توابع زیر $\frac{dw}{dt}$ محاسبه کنید.

$w=e^{xyz}$ و $x=t^{۲}$ و $y=t^{۳}$ و $z=۲t$

حل :

$$\frac{dw}{dt}=(yze^{xyz})(۲t)+(xze^{xyz})(۳t^{۲})+(xye^{xyz})(۲)$$

$$\frac{dw}{dt}=(۲yzt+۳xzt^{۲}+۲xy)e^{xyz}$$

$$=(۲t^{۶}+۶t^{۵}+۲t^{۵})e^{۲t^{۵}}=(۲t^{۶}+۸t^{۵})e^{۲t^{۵}}=۲t^{۵}(t+۴)e^{۲t^{۵}}$$

تمرین برای حل : با توجه به توابع زیر $\frac{dw}{dt}$ محاسبه کنید.

$w=\sqrt{xyz}$ و $x=۴t$ و $y=۳t$ و $z=۲t$

***

ماگزیمم و مینیمم در توابع دو متغیره

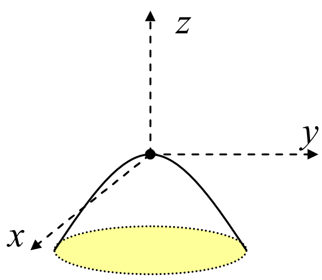
تابع $z = f(x,y)$ از دو متغیر مستقل x و y و نقطه ی (a,b) از دامنه ی تابع f را در نظر بگیرید.

در این صورت :

۱) $f(a,b)$ را ماگزیمم مطلق f گویند، هرگاه برای هر $(x,y) \in D_f$ داشته باشیم :

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

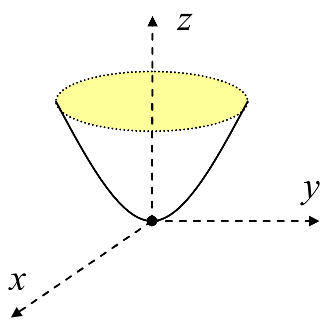
برای مثال نقطه ی (۰,۰) یک نقطه ی ماگزیمم مطلق تابع شکل زیر است.



۲) $f(a,b)$ را مینیمم مطلق f گویند، هرگاه برای هر $(x,y) \in D_f$ داشته باشیم :

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

برای مثال نقطه ی (۰,۰) یک نقطه ی مینیمم مطلق تابع شکل زیر است.



۳) $f(a,b)$ را ماگزیمم نسبی f گویند، هرگاه دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه ی f باشد که به ازای برای هر (x,y) درون این دایره داشته باشیم : $f(a,b) \geq f(x,y)$

۴) $f(a,b)$ را مینیمم نسبی f گویند، هرگاه دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه ی f باشد که به ازای برای هر (x,y) درون این دایره داشته باشیم : $f(a,b) \leq f(x,y)$

***

نکته ی ۱ : اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه ی (a,b) دارای ماگزیمم یا مینیمم نسبی باشد، آنگاه:

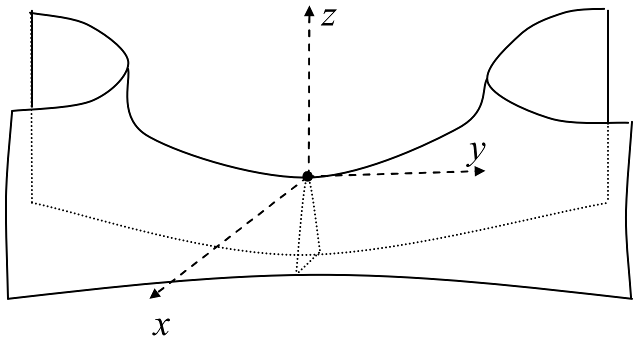
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=۰$$

تعریف : نقطه ی (a,b) از دامنه ی تابع $z=f(x,y)$ را **نقطه ی بحرانی** تابع می نامند، هرگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=۰$$

نکته ی ۲ : اگر تابع $z=f(x,y)$ داشته باشیم $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=۰$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=۰$ ولی تابع در نقطه ی (a,b) دارای ماگزیمم یا مینیمم نسبی نباشد، آنگاه در این نقطه دارای نقطه ی زینی (زین اسبی) است.

برای مثال تابع نمودار زیر ، نقطه ی $(۰,۰)$ یک نقطه ی زین اسبی تابع است.



در واقع نقطه ی زین اسبی دارای شرایط ماگزیمم و مینیمم می باشد، ولی ماگزیمم و مینیمم نیست.

***

تمرین : نقطه ی بحرانی تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱$ در صورت وجود را بدست آورید.

حل : کافی است که دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=۲x+۲=۰ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=۲y-۴=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲x=-۲ \\ ۲y=۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=۲ \end{cases}$$

پس تنها جواب این دستگاه نقطه ی $(-۱,۲)$ است. این نقطه ، نقطه ی بحرانی تابع f است.

***

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط ماگزیمم و مینیمم تابع دو متغیره

به کمک آزمون زیر می توان نقاط بحرانی تابع دو متغیره را تعیین نمود و نوع آنها را نیز مشخص کرد. برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول را تعیین کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ٠ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ٠ \end{cases}$$

به این ترتیب مختصات نقطه‌ی بحران بدست می‌آید. اگر مختصات این نقطه (a,b)فرض شود.

۲ : مقدار دلتا را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta = \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right| (a,b) \right) \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \right| (a,b) \right) - \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} \right| (a,b) \right)^۲$$

۳ : با توجه به مقدار بدست آمده برای دلتا ، نوع نقطه ی بحرانی را در تعیین می کنیم.

الف : اگر $\Delta > ٠$ و $\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right| (a,b) < ٠$ ، آنگاه نقطه ی (a,b) ماگزیمم نسبی است.

ب : اگر $\Delta > ٠$ و $\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right| (a,b) > ٠$ ، آنگاه نقطه ی (a,b) مینیمم نسبی است.

ج : اگر $\Delta < ٠$ باشد، آنگاه نقطه ی (a,b) زین اسبی است.

د : اگر $\Delta = ٠$ باشد، آنگاه در نوع نقطه ی بحرانی (a,b) را نمی توان مشخص کرد و روشهای دیگری را باید بکاربرد.

توجه: در بند های الف و ب می توان بجای $\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right| (a,b)$ از $\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \right| (a,b)$ نیز استفاده نمود.

مثال : تابع $f(x,y)=x^{۲}+xy+y^{۲}-۳x+۲$ داده شده است.

الف) نقطه یا نقاط بحرانی تابع را در صورت وجود بدست آورید.

ب) نوع نقطه‌ی نقاط بحرانی بدست آمده را تعیین کنید.

حل :

الف)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=۲x+y-۳=۰\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=x+۲y=۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۲x+y=۳\\ x+۲y=۰\end{cases}\rightarrow x=۲\ ,\ y=-۱$$

پس نقطه ی $A(۲,-۱)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

ب)

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}x}=۲ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}y}=۲$$

$$\Delta=\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}\right|(a,b)\right)\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}\right|(a,b)\right)-\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}\right|(a,b)\right)^{۲}=(۲)(۲)-(۱)^{۲}=۳$$

پس چون $\Delta>۰$ و $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}x}>۰$ پس نقطه ی $A(۲,-۱)$ یک نقطه ی مینیمم است.

تمرین : تابع $f(x,y)=۱+x^{۲}-y^{۲}$ را در نظر بگیرید.

الف) نقطه یا نقاط بحرانی تابع را در صورت وجود بدست آورید.

ب) نوع نقطه‌ی بحرانی بدست آمده را تعیین کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=۲x=۰\rightarrow x=۰\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-۲y=۰\rightarrow y=۰\end{cases}$$

پس نقطه ی $A(۰,۰)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-۲ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-۲$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \bigg|_{(a,b)} \right) \left(\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \bigg|_{(a,b)} \right) - \left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} \bigg|_{(a,b)} \right)^۲$$

$$\Delta = (۲)(-۲) - (۰)^۲ = -۴$$

و چون $\Delta = -۴ < ۰$ نقطه‌ی $A(۰,۰)$ زین اسبی است.

تمرین برای حل : در هر مورد نقطه یا نقاط بحرانی تابع داده شده در صورت وجود را تعیین و سپس نوع آن را مشخص کنید.

۱) $f(x,y) = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲$

۲) $f(x,y) = ۲x^۲ - xy + ۵$

۳) $f(x,y) = x^۲ - ۶xy + ۹y^۲ + ۳x - ۱۰$

۴) $f(x,y) = ۴x + ۲y - x^۲ - y^۲$

۵) $f(x,y) = ۱ + e^{xy}$

۶) $f(x,y) = x^۳ - ۳xy + y^۳$

***

یک مسئله ی کاربردی : اگر توابع تقاضای دو کالای x و y به صورت $q = ۴۰ - ۵y$ و $p = ۳۶ - ۳x$ و تابع هزینه ی مشترک آنها ، $c = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲$ باشد. مطلوب است تعیین مقداری که سود انحصارگر را ماگزیمم کرده و سپس سود ماگزیمم را محاسبه کنید.

حل : می دانیم که سود (p) حاصل تفاضل هزینه (c) از درآمد(x) می باشد.پس $p = x - c$

اکنون مقادیر مفروضات مسئله را در رابطه ی سود جایگزین کرده و ساده می کنیم.

تابع سود $f = (px + qy) - c$

$$f(x,y) = (۳۶ - ۳x)x + (۴۰ - ۵y)y - (x^۲ + ۲xy + ۳y^۲)$$

$$f(x,y) = ۳۶x - ۳x^۲ + ۴۰y - ۵y^۲ - x^۲ - ۲xy - ۳y^۲$$

$$f(x,y) = -۴x^۲ - ۸y^۲ - ۲xy + ۳۶x + ۴۰y$$

حال نقاط بحرانی تابع و نوع آنها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-۸x-۲y+۳۶=۰\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-۱۶y-۲x+۴۰=۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-۸x-۲y=-۳۶\\ -۱۶y-۲x=-۴۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۴x+y=۱۸\\ x+۸y=۲۰\end{cases}\rightarrow x=۴\ ,\ \ y=۲$$

پس نقطه ی $A(۴,۲)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=-۸ \text{ و } \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=-۲ \text{ و } \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=-۱۶$$

$$\Delta=\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\bigg|(a,b)\right)\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\bigg|(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}\bigg|(a,b)\right)^۲$$

$$\Delta=(-۸)(-۱۶)-(-۲)^۲=۱۲۸+۴=۱۲۴$$

و چون $\Delta>۰$ و $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}<۰$ پس نقطه‌ی $A(۴,۲)$ نقطه ی ماگزیمم است.

برای محاسبه ی سود ماگزیمم ، مقادیر $x=۴$ و $y=۲$ در تابع سود قرار می دهیم.

تابع سود $f(x,y)=-۴x^۲-۸y^۲-۲xy+۳۶x+۴۰y$

$$f(۴,۲)=-۴(۴)^۲-۸(۲)^۲-۲(۴)(۲)+۳۶(۴)+۴۰(۲)=۱۱۲\rightarrow \max(f)=۱۱۲$$

تمرین برای حل : برای توابع تقاضا و تابع هزینه ی مشترک زیر ، مقدار ماگزیمم سود و همچنین سود ماگزیمم را بدست آورید.

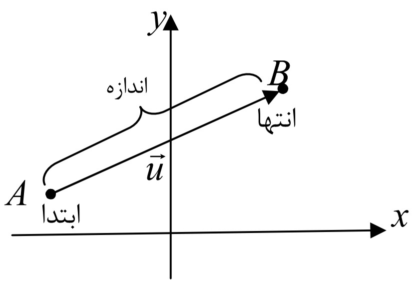
$$\begin{cases}p=۱۰-x\\ q=۲۰-۲y\\ c=x^۲+۲xy+y^۲\end{cases}$$

***

فصل ۲: بردارها در فضای دو بعدی

بردار ها ، پاره خط های جهت داری هستند که ، دارای امتداد و مقدار می باشند. اعمال روی بردارها را هم به روش تحلیلی و هم به روش هندسی می توان بررسی نمود. در این فصل بردار ها را در فضای دوبعدی معرفی و به ویژگی ها و اعمال روی آنها می پردازیم.

بردارها در فضای دو بعدی



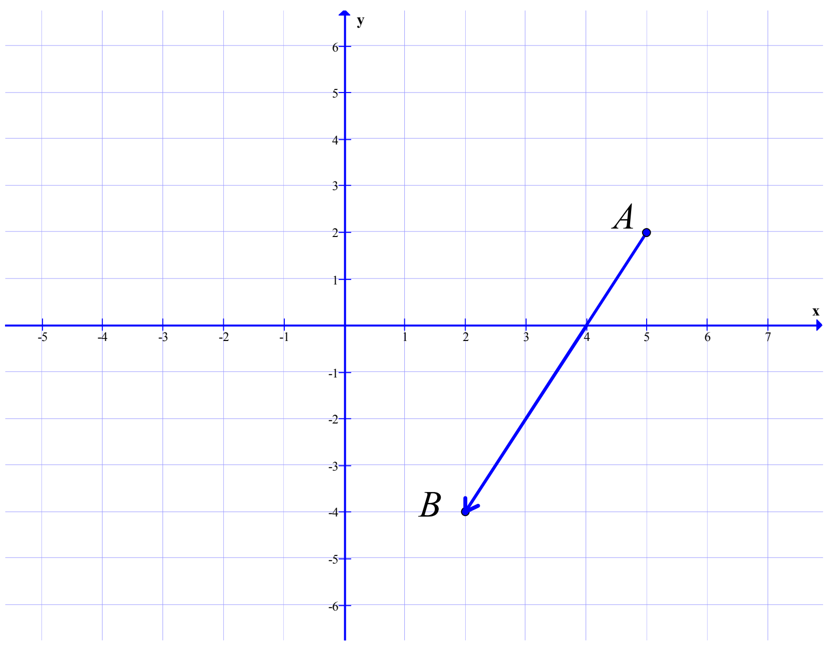
هر پاره خط جهت دار را یک پیکان می‌نامند. در شکل مقابل پاره خط جهت دار AB یک پیکان است. این پیکان را با نماد $\overrightarrow{AB}$ یا به اختصار $\vec{u}$ نمایش می دهیم. هر پیکان دارای چهار مشخصه ی مبدأ ، جهت ، امتداد و اندازه می باشد.

برای هر پیکانمی توان یک زوج مرتب تحت عنوان مختصات پیکان به صورت زیر نوشت. مختصات پیکان نشان دهنده ی تغییرات طولی و عرضی نقاط ابتدا و انتهای پیکان می باشد.

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A) \qquad \text{مختصات پیکان}$$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ ابتدا و $B=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$ انتهای پیکان $\overrightarrow{AB}$ باشند. ابتدا پیکان را رسم و سپس مختصات آن را بدست آورید.

حل :



مختصات این پیکان نیز به شکل زیر است.

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(۲-۵,-۴-۲)=(-۳,-۶)$$

اگر نقاط ابتدا و انتهای پیکانی بر هم منطبق باشند، پیکان را **پیکان صفر** می نامند و آن را با $\vec{o}$ نمایش می دهند. مختصات پیکان صفر به صورت زیر است.

$$\vec{o}=(۰,۰)$$

اندازه یا طول هر پیکان مانند $\overrightarrow{AB}$ برابر طول پاره خط منطبق بر آن یعنی AB می باشد. اندازه ی پیکان $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\|\overrightarrow{AB}\|$ نمایش می دهیم و به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

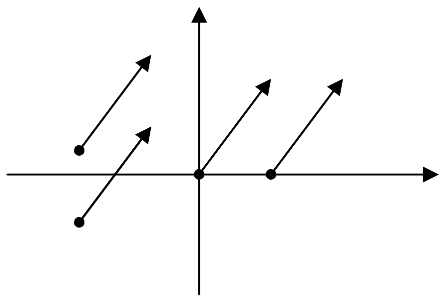
تمرین : اندازه پیکان تمرین قبل را محاسبه کنید.

حل :

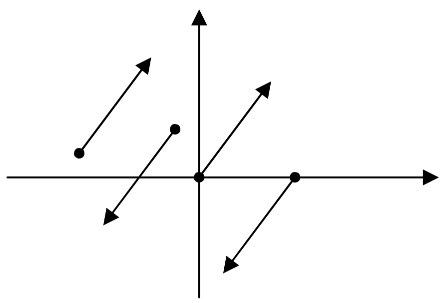
$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(۲-۵)^۲+(-۴-۲)^۲}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

تذکر : دو پیکان را مساوی گویند ، هرگاه مختصات آنها یکسان باشد. به عبارتی دیگر موازی ، هم جهت و هم اندازه باشند.



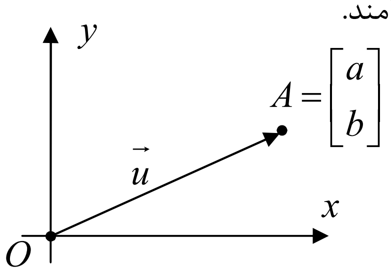
همچنین دو پیکان را قرینه گویند، هرگاه مختصات آنها قرینه باشد. یعین موازی ، هم اندازه ولی غیر هم جهت هستند.



یادآوری : مختصات نقطه ی M وسط پاره خط AB به شکل زیر بدست می آید.

$$M=\begin{bmatrix}\dfrac{x_A+x_B}{۲}\\ \dfrac{y_A+y_B}{۲}\end{bmatrix}$$

تعریف : هر پیکان که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را **بردار** می نامند.



نتیجه : اگر نقطه ی $A=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ انتهای بردار $\overrightarrow{OA}$ باشد. در این صورت :

الف : مختصات بردار با مختصات نقطه ی انتهایی آن برابر است.

$$\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O\,,y_A-y_O)=(a-۰,b-۰)=(a,b)$$

ب : اندازه ی بردار به شکل زیر محاسبه می شود.

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}=\sqrt{(a-۰)^۲+(b-۰)^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ ابتدا و $B=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ دو نقطه در صفحه ی محور های مختصات و M نقطه ی وسط پاره خط AB باشند. مختصات و اندازه ی بردار $\overrightarrow{OM}$ را بدست آورید.

حل :

$$M=\begin{bmatrix}\dfrac{x_A+x_B}{۲}\\ \dfrac{y_A+y_B}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{۲+۴}{۲}\\ \dfrac{۱+(-۳)}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}=(۳,-۱)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

***

تمرین برای حل : اگر $M=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ نقطه ای روی صفحه ی باشد.

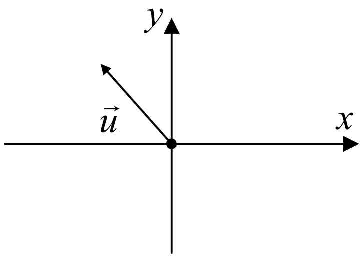
الف : بردار $\overrightarrow{OM}$ را رسم کنید.

ب : اندازه ی بردار $\overrightarrow{OM}$ را تعیین کنید.

***

بردار واحد

هر بردار که اندازه آن یک واحد طول باشد را بردار واحد (بردار یکه) می نامند.



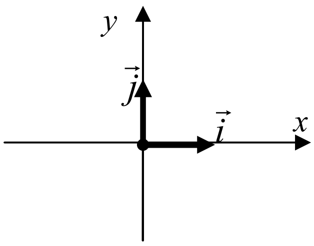
به عبارتی دیگر بردار $\vec{u}$ یکه است اگر و تنها اگر $\|\vec{u}\|=۱$

تمرین : نشان دهید که بردار $\vec{u}=(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})$ بردار واحد است.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}+(\frac{۲}{\sqrt{۵}})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۵}}=\sqrt{\frac{۵}{۵}}=۱$$

دو بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ که اولی بر محور طول ها و دومی بر محور عرض ها منطبق و همجهت آنها است را بردار واحد مختصات (استاندارد) می‌نامند.

$$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=۱$$



توجه : هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای واحد مختصات نوشت:

$$\vec{u}=(a,b)$$
$$\rightarrow \vec{u}=(a,۰)+(۰,b)$$
$$\rightarrow \vec{u}=a(۱,۰)+b(۰,۱)$$
$$\rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{ai}+\overrightarrow{bj}$$

تمرین : بردار $\vec{u}=۵\vec{i}-۴\vec{j}$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات این بردار را بنویسید ب) اندازه‌ی بردار را بدست آورید.

حل :

$\vec{u} = (۵,-۴)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{۲۵ + ۱۶} = \sqrt{۴۱}$

***

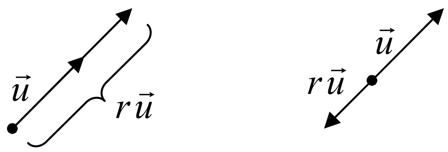
اعمال روی بردار ها

در ادامه به اعمال روی بردار ها اشاره می کنیم.

الف: ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{u}$ یک بردار و r یک عدد حقیقی باشند. در این صورت ضرب عدد r در بردار $\vec{u} = (a,b)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$r\vec{u} = r(a,b) = (ra, rb)$$



تذکر :

۱ : اگر $|r| > ۱$ آنگاه اندازه ی بردار $r\vec{u}$ از اندازه ی بردار $\vec{u}$ بیشتر است.

۲ : اگر $|r| = ۱$ آنگاه اندازه ی بردار $r\vec{u}$ با اندازه ی بردار $\vec{u}$ برابر است.

۳ : اگر $|r| < ۱$ آنگاه اندازه ی بردار $r\vec{u}$ از اندازه ی بردار $\vec{u}$ کمتر است.

۴ : اندازه ی بردار $r\vec{u}$ با حاصل ضرب قدرمطلق r در اندازه ی بردار $\vec{u}$ برابر است.

$$\|r\vec{u}\| = |r| \times \|\vec{u}\|$$

۵ : اگر r مثبت باشد، دو بردار $r\vec{u}$ و $\vec{u}$ هم جهت هستند.

۶ : اگر r منفی باشد، دو بردار $r\vec{u}$ و $\vec{u}$ در جهت مخالف همدیگر هستند.

۷ : اگر $r = ۰$ باشد، دو بردار $r\vec{u} = \vec{o} = (۰,۰)$

۸ : اگر $r = ۱$ باشد. در این صورت $r\vec{u} = \vec{u} = (a,b)$

۹ : اگر $r = -۱$ باشد. در این صورت $r\vec{u} = -\vec{u}$ لذا $-\vec{u} = (-a,-b)$

***

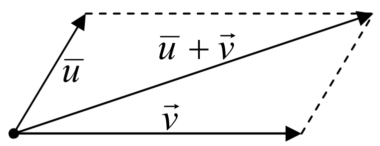
ب : جمع دو بردار

اگر $\vec{u}=(a_{۱},b_{۱})$ و $\vec{v}=(a_{۲},b_{۲})$ دو بردار باشند. در این صورت جمع این دو بردار بـه صـورت زیـر تعریف می شود.

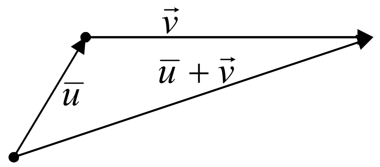
$$\vec{u}+\vec{v}=(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+a_{۲},b_{۱}+b_{۲})$$

نمایش هندسی جمع جبری دو بردار به شکل های زیر است.

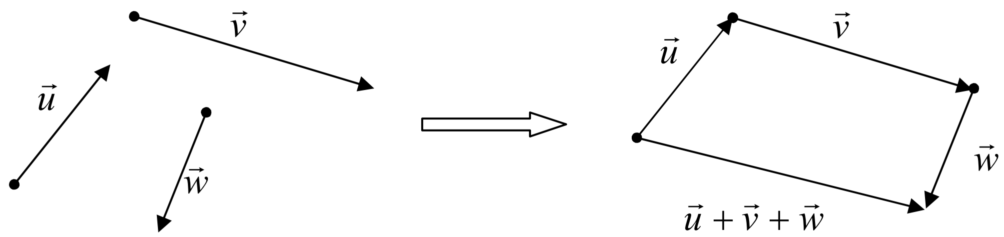
حالت اول : اگر دو بردار هم مبدأ باشند. بردار حاصل جمع، قطری است از متوازی الاضلاع است که با این دو بردار تشکیل می شود. به شرط اینکه این بردار قطری هم مبدأ با دو بردار داده شده باشد.



حالت دوم : اگر دو بردار طوری باشند که انتهای یکی ابتدای دیگری باشد. بردار حاصل جمع بـرداری است که مبدأ آن مبدأ اولی و انتهای آن انتهای دومی می باشد.



این روش برای حاصل جمع چند بردار که حالت های فوق را نداشته باشند، را نیز می توان بکـار بـرد. بشر اینکه از بردار های مساوی استفاده نمایید.



***

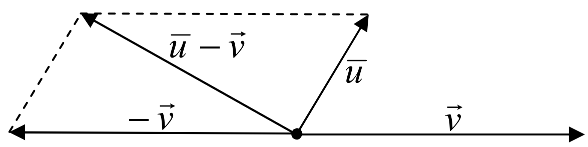
ج : تفاضل دو بردار

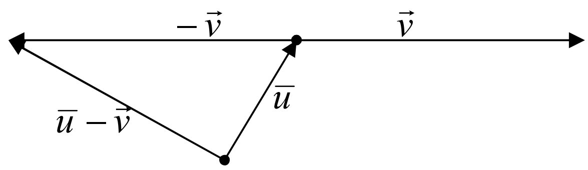
اگر $\vec{u}=(a_1,b_1)$ و $\vec{v}=(a_2,b_2)$ دو بردار باشند. در این صورت تفاضل این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u}-\vec{v}=(a_1,b_1)-(a_2,b_2)=(a_1-a_2,b_1-b_2)$$

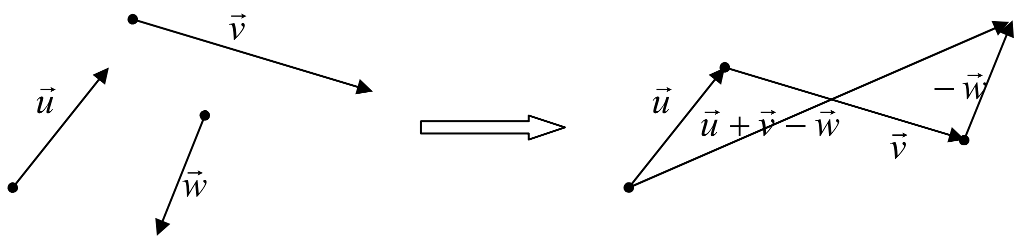
یعنی بردار $\vec{u}-\vec{v}$ با حاصل جمع بردار اولی با قرینه ی بردار دومی بدست می آید.

بطور مشابه نمایش هندسی تفاضل دو بردار به شکل های زیر است.





برای مثال داریم:



***

د : ضرب داخلی دو بردار

اگر $\vec{u}=(a_1,b_1)$ و $\vec{v}=(a_2,b_2)$ دو بردار باشند. در این صورت ضرب داخلی[1] این دو بردار عددی است که به صورت های محاسبه می شود.

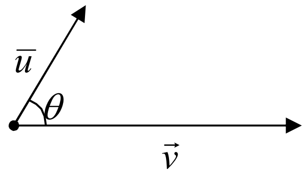
حالت اول : اگر مختصات دو بردار معلوم باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2$$

[1] . ضرب عددی یا ضرب نقطه ای نیز نامیده می شود.

حالت دوم : اگر اندازه ها دو بردار و زاویه ی بین آنها معلوم باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$$



***

تمرین : اگر $\vec{u}=(۲,-۳)$ و $\vec{v}=(-۴,۷)$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱) $۲\vec{u}=$	۵) $\vec{v}-\vec{u}=$
۲) $-\vec{v}=$	۶) $۲\vec{u}+۳\vec{v}=$
۳) $\vec{u}+\vec{v}=$	۷) $\vec{u}.\vec{v}=$
۴) $\vec{u}-\vec{v}=$	۸) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$

حل :

۱) $۲\vec{u}=۲(۲,-۳)=(۴,-۶)$

۲) $-\vec{v}=-(-۴,۷)=(۴,-۷)$

۳) $\vec{u}+\vec{v}=(۲,-۳)+(-۴,۷)=(-۲,۴)$

۴) $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(۲,۳)+(۴,-۷)=(۶,-۱۰)$

۵) $\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}+(-\vec{u})=(-۴,۷)+(-۲,۳)=(-۶,۱۰)$

۶) $۲\vec{u}+۳\vec{v}=۲(۲,-۳)+۳(-۴,۷)=(۴,-۶)+(-۱۲,۲۱)=(-۸,۱۵)$

۷) $\vec{u}.\vec{v}=(۲)(-۴)+(-۳)(۷)=-۸-۲۱=-۲۹$

۸) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=(-۴)(۶)+(۴)(-۱۰)=-۲۴-۴۰=-۶۴$

تذکر: ضرب داخلی دو بردار همواره یک عدد حقیقی است.

تمرین: اگر $\|\vec{u}\|=۳$ و $\|\vec{v}\|=۳$ زاویه بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر ۶۰ درجه باشد حاصل ضرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = ۳\times ۱۰ \times \cos ۶۰ = ۳ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۵$$

تمرین برای حل :

۱ : حاصل تساوی های زیر را بدست آورید.

الف) $a\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} =$

ب) $(۲\vec{i} + ۳\vec{j}) + ۲(-۳\vec{i} + ۲\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) =$

ج) $(۲\vec{i} - ۷\vec{j}) + (۴\vec{i} + ۵\vec{j}) =$

د) $(۵\vec{i} + ۲\vec{j}).(۱۰\vec{i} - ۲\vec{j}) =$

۲ : در هر مورد مختصات بردار $\vec{x}$ را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱۲ \end{bmatrix} + \vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$

ب) $-۴\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix} + ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$

ج) $\vec{x} - ۲\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۵ \end{bmatrix}$

***

تعیین زاویه ی بین دو بردار

با توجه به تعریف ضرب داخلی دو بردار ، به سهولت می توان رابطه‌ی زیر را برای تعیین زاویه ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را بکار برد.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

تمرین : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v} = ۲\vec{i}$ و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ را بدست آورید.

حل :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(۲)^۲ + (۰)^۲} = \sqrt{۴ + ۰} = ۲$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (۱)(۲) + (۱)(۰) = ۲ + ۰ = ۲$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{۲}{(\sqrt{۲})(۲)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \theta = ۴۵^\circ$$

تمرین برای حل :

۱ : کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v}=(۳,۲)$ و $\vec{u}=(۴,۳)$ را محاسبه کنید.

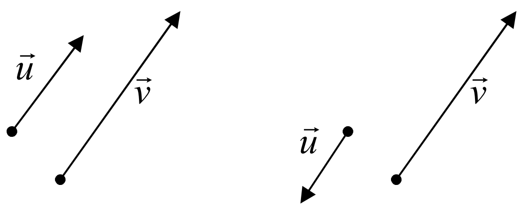
۲ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v}=(۱,\sqrt{۳})$ و $\vec{u}=(\sqrt{۳},۱)$ را بدست آورید.

۳ : اگر $\|\vec{u}\|=۱$ و $\|\vec{v}\|=۲$ و $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{۳}$. زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را بدست آورید.

***

بردار های موازی

دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی هستند، هرگاه عدد حقیقی و غیر صفر r وجود داشته باشد که $\vec{u}=r\vec{v}$



با این تعریف ، به سهولت می توان گفت که اگر $\vec{u}=(a_۱,b_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲)$ دو بردار موازی باشند، پس :

$$\vec{u}=r\vec{v}$$
$$(a_۱,b_۱)=r(a_۲,b_۲)$$
$$(a_۱,b_۱)=(ra_۲,rb_۲)$$
$$\to \begin{cases} a_۱ = ra_۲ \to \dfrac{a_۱}{a_۲}=r \\ b_۱ = rb_۲ \to \dfrac{b_۱}{b_۲}=r \end{cases} \to \frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}$$

تمرین : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۷,-۳)$ و $\vec{v}=(-۱۴,۶)$ موازیند.

حل :

$$\to \begin{cases} \dfrac{a_۱}{a_۲}=\dfrac{۷}{-۱۴}=-\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{b_۱}{b_۲}=\dfrac{-۳}{۶}=-\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \to \frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲} \to \vec{u}\parallel\vec{v}$$

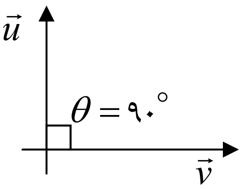
تمرین برای حل :

اگر دو بردار $\vec{u}=(۵,۱۰)$ و $\vec{v}=(m-۱,۲)$ موازی باشند. مقدار m را تعیین کنید.

***

بردار های متعامد

دو بردار بر هم عمودند هرگاه زاویه ی بین آنها برابر ۹۰ درجه باشد.



$$\theta=۹۰^\circ \rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی به سهولت می توان گفت که دو بردار بر هم عمودند ، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر شود و برعکس

$$\vec{u}.\vec{v}=۰ \quad \leftrightarrow \quad \vec{u}\perp\vec{v}$$

تمرین : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(-۱,\sqrt{۳})$ و $\vec{v}=(۶,۲\sqrt{۳})$ برهم عمودند.

حل :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}&=(-۱)(۶)+(\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳})\\&=-۶+۲(۳)\\&=-۶+۶=۰\rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\end{aligned}$$

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۳,۵)$ و $\vec{v}=(-۵,۳)$ برهم عمودند.

۲ : مقدار m را چنان تعیین کنید که دو بردار $\vec{u}=(m+۱,۳m)$ و $\vec{v}=(۴,۲)$ برهم عمود باشند.

۳ : اگر $A=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}$ سه رأس مثلثی باشند. نشان دهید که این مثلث قائم الزاویه است.

۴ : اگر $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴\\۳\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۲\\۶\end{bmatrix}$ مختصات رئوس چهار ضلعی $ABCD$ باشند. به روش برداری ثابت کنید که دو قطر AC و BD بر هم عموند.

ترکیب خطی دو بردار

بردار $\vec{w}$ را ترکیب خطی از دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ می نامند، هرگاه دو عدد حقیقی a و b موجود باشند که :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

هرگاه گویند، بردار $\vec{w}$ به صورت ترکیب خطی بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نوشته شده است[2].

نتیجه : قبلاً بیان شد که هر بردار را می توان بر حسب بردارهای واحد مختصات نوشت. پس می توان گفت هر بردار را می توان به صورت ترکیب خطی از بردار های واحد مختصات نوشت. برای مثال :

$$\vec{u} = (a,b) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

تمرین :

بردار $\vec{w} = (۳,۵)$ را به صورت ترکیب خطی از بردار های $\vec{u} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ و $\vec{v} = ۲\vec{i} + \vec{j}$ بنویسید.

حل : واضح است که $\vec{u} = \vec{i} + ۲\vec{j} = (۱,۲)$ و $\vec{v} = ۲\vec{i} + \vec{j} = (۲,۱)$ پس می توان نوشت:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$
$$(۳,۵) = a(۱,۲) + b(۲,۱)$$
$$(۳,۵) = (a + ۲b, ۲a + b)$$
$$\rightarrow \begin{cases} a + ۲b = ۳ \\ ۲a + b = ۵ \end{cases} \rightarrow a = \frac{۷}{۳}, b = \frac{۱}{۳}$$

لذا :

$$\vec{w} = \frac{۷}{۳}\vec{u} + \frac{۱}{۳}\vec{v}$$

تمرین برای حل :

۱ : بردار $\vec{w} = (۱۶,۶)$ را به صورت ترکیب خطی از بردار های $\vec{u} = (-۱,-۳)$ و $\vec{v} = (۳,۲)$ بنویسید.

۲ : بردار $\vec{w} = (-۴,-۵)$ را به صورت ترکیب خطی از بردار های $\vec{u} = (-۲,۱)$ و $\vec{v} = (۱,-۴)$ بنویسید.

***

[2] . تبدیل یک بردار به صورت ترکیب خطی از دو بردار غیر صفر دیگر را تجزیه ی بردار می نامند.

فصل ۳: جبر ماتریس ها

در این فصل با مفهوم ماتریس و ویژگی های آن آشنا می شوید و در نهایت از این مفهـوم بـرای حـل دستگاه های معادلات خطی استفاده می کنیم.

مفهوم ماتریس

هر چینش مستطیل شکل از اعداد ، در قالب سطر و ستون را یک ماتریس می‌نامند. هر ماتریس را با یک حرف بزرگ لاتین نامگذاری می‌کنند. مانند ماتریس زیر

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} ۲ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \end{array}$$

این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است[1]. در اصطلاح گویند این ماتریس دارای مرتبه‌ی ۳×۲ است[2]. هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را درایه می‌نامند. اگر درایه k در سطر i و سـتون j قرار دارد، می‌نویسند.

$$a_{ij} = k$$

مثلاً در ماتریس فوق می توان نوشت : $a_{۲۳} = ۱$ و $a_{۱۲} = -۳$ و $a_{۲۲} = ۰$ و $a_{۲۱} = ۳$

تمرین : ماتریس زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف) مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

ب) درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول کدام است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ -۲ & ۰ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل : الف) مرتبه ی ماتریس ۲×۴ است. ب) $a_{۲۱} = ۳$

---

[1] . سطر ها را از بالا به پایین و ستون ها را از چپ به راست شماره گذاری می کنند.

[2] . اگر ماتریسی دارای m سطر و n ستون باشد. در این صورت گویند ماتریس از مرتبه ی $m \times n$ است.

تمرین : اگر i شماره ی سطر و j شماره ی ستون هر درایه باشند. ماتریس زیر را با درایه هایش بنویسید.

$$A=[i^{۲}+j^{۲}]_{۲\times۳}$$

حل :

$$A=[i^{۲}+j^{۲}]_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}(۱)^{۲}+(۱)^{۲} & (۱)^{۲}+(۲)^{۲} & (۱)^{۲}+(۳)^{۲}\\(۲)^{۲}+(۱)^{۲} & (۲)^{۲}+(۲)^{۲} & (۲)^{۲}+(۳)^{۲}\end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۱۰\\ ۵ & ۸ & ۱۳\end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

تمرین برای حل : اگر i شماره ی سطر و j شماره ی ستون هر درایه باشند. در هر مورد ماتریس داده شده را تشکیل دهید.

۱) $A=[۳i+۲j]_{۲\times۲}$

۲) $B=[-ij]_{۳\times۳}$

۳) $C=[۳j]_{۳\times۲}$

۴) $D=[۲(-۱)^{i+j}]_{۳\times۳}$

❋❋❋

ماتریس مربعی

اگر تعداد سطر و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را مربعی می‌نامند.

مانند ماتریس‌های زیر.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

هر ماتریس مربعی مانند یک چهارضلعی دارای دو قطر است. قطری که درایه های a_{ij} برای $i=j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و دیگری را قطر فرعی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$$

قطر فرعی قطر اصلی

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

***

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری : ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مانند ماتریس زیر

$$A=[۱ \quad ۳ \quad -۱ \quad ۵]_{۱\times ۴}$$

۲) ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مانند ماتریس زیر

$$B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

۳) ماتریس صفر : ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

در این فصل ماتریس صفر را با نماد O نمایش می دهیم.

۴) ماتریس همانی (واحد): یک ماتریس مربعی می‌باشد که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر هستند. مانند ماتریس زیر

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۵) ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایـه هـای بـالای قطـر اصـلی آن صـفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۷) ماتریس بالا مثلثی : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه هـای روی قطـر اصـلی آن برابـر باشـند. مانند ماتریس های زیر

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های مساوی

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

الف : هم مرتبه باشند.

ب : درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.یعنی برای هر j و i

$$(A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij})$$

مثلاً: $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

تمرین برای حل :

۱ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار b و a را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & a \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۲a+b & ۵ \end{bmatrix}$$

۲ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار y و x را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & x+۱ \\ ۲ & ۳ \\ ۱ & y \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & y^{۲}+۱ \\ ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

***

ضرب عدد در یک ماتریس : (ضرب اسکالر)

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را درتمام درایه‌ها ضرب کنیم. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} -۲ & ۶ & ۱۰ \\ ۴ & ۰ & -۱۴ \end{bmatrix}$$

اگر تمام درایه های یک ماتریس را در عدد ۱− ضرب کنیم. ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می نامند. به عبارتی ساده تر اگر تمام درایه‌های ماتریسی را قرینه کنیم ماتریس جدیدی بدست می‌آید که آن را ماتریس قرینه می گویند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$$

ماتریس قرینه $\quad -A=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & -۵ \\ -۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$

***

اعمال روی ماتریس ها

در ادامه اعمال روی ماتریس ها را معرفی می کنیم.

الف : جمع ماتریس‌ها

دو ماتریس را وقتی می‌توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه‌های نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A+B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب : تفاضل ماتریس‌ها

برای تفاضل دو ماتریس کافی است ماتریس اولی را با قرینه‌ی دومی جمع کنیم.

$$A-B=A+(-B)$$

برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه :

۱) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس صفر هم مرتبه اش، برابر همان ماتریس است.

$$A+O=A$$

۲) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس قرینه اش، برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=O$$

۳) جمع ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

$$A+B=B+A$$

۴) جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

ج : ضرب ماتریس :

دو ماتریس را وقتی می‌توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون های اولی برابر تعداد سطر های دومی باشد. در این صورت هر درایه‌ی ماتریس حاصل ضرب را به شکل ضرب داخلی تعیین می‌کنیم.

مثال ۱ :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۴}=\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۳ & ۵ & ۳ \\ ۱۸ & ۲۳ & ۱۹ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۴}$$

مثال ۲ :

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۱ \\ ۳۷ & ۲۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

تذکر ۱ : ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. زیرا اگر $A\times B$ تعریف می شود، ممکن است $B\times A$ قابل تعریف نباشد و ممکن است قابل تعریف باشد ولی حاصل برابر $A\times B$ نشود.

به نمونه های زیر توجه کنید.

نمونه ی اول :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۴ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}=$$ تعریف نمی شود.

$$\rightarrow A\times B\neq B\times A$$

نمونه ی دوم :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}\times\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}3 & 11\\ 4 & 16\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}\times\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 8 & 15\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rightarrow A\times B\neq B\times A$$

تذکر ۲ : ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A(BC)=(AB)C$$

تذکر ۳ : ضرب ماتریس ها نسبت به جمع آنها توزیع پذیر است.

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر ۴ : اگر A یک ماتریس مربعی و r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $A^1=A$ ۲) $A^n=A^{n-1}\times A$ ۳) $I^n=I$ ۴) $(rA)^n=r^nA^n$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ مطلوب است

محاسبه ی

الف) $3A=$ ج) $A\times C$ هـ) $A\times B$

ب) $B+D=$ د) $B-D$

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ماتریس $A\times B\times C$ را بدست

آورید.

۳ : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $A \times B =$ ب) $B \times A =$ ج) $A^{۲} =$

۴ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^{۳}$ را تعیین کنید.

۵ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^{۲} + AB + ۲B$ را بیابید.

۶ : اگر $A = \begin{bmatrix} mn & n^{۲} \\ -m^{۲} & -mn \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^{۲} = O$

۷ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^{۳} = O$

۸ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید که

$$A(B + C) = AB + AC$$

۹ : معادله ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & y \\ x & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

۱۰ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $(A + B) \times (A - B)$ ب) $(A + B)^{۲}$

۱۱ : مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۳ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ b \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۱۲ : ماتریس X را طوری بیابید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$

***

ترانهاده ی یک ماتریس

اگر جای سطر ها و ستون های یک ماتریس را جا به جا کنیم، ماتریس دیگری حاصل می شود که آنرا ماتریس ترانهاده می نامند. ترانهاده ی ماتریس A را به صورت A^t نمایش می دهند.

نتیجه : اگر مرتبه ی ماتریس A برابر $m \times n$ باشد. مرتبه ی ترانهاده ی آن یعنی A^t برابر $n \times m$است.

تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت ترانهاده ی ماتریس A را بنویسید.

حل :

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

تمرین برای حل : اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $A^۲ - A^t + I_۲$ را بدست آورید.

تذکر: اگر B و A دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و r یک عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱) $(A+B)^t = A^t + B^t$ ۳) $(AB)^t = B^t A^t$ ۵) $(A^t)^n = (A^n)^t$

۲) $(rA)^t = rA^t$ ۴) $(A^t)^t = A$ ۶) $I^t = I$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $(AB)^t = B^t A^t$

۲ : تساوی مقابل را ثابت کنید. $(AB^t - BA^t)^t = BA^t - AB^t$

***

ماتریس های متقارن و پادمتقارن

یک ماتریس مربعی را **متقارن** می گویند، هرگاه با ترانهاده اش برابر باشد.

$$A^t = A$$

اگر ترانهاده‌ی یک ماتریس مربعی با قرینه‌ی آن ماتریس برابر باشد، آن ماتریس را **پاد متقارن** گویند.

$$A^t = -A$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ متقارن و ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

حل :

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \to A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \to A = A^t \quad \to$ ماتریس A متقارن است.

$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \to B^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \to B = B^t \to$ ماتریس B پاد متقارن است.

تمرین برای حل: نشان دهید که ماتریس $C = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۵ \\ -۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

نتیجه : ماتریس واحد ، متقارن است. $I^t = I$

تمرین: ثابت کنید که ماتریس مربعی صفر هم متقارن و هم پادمتقارن است.

حل : فرض می کنیم که A یک ماتریس مربعی دلخواه بوده که هم متقارن و هم پادمتقارن می باشد.

ثابت می کنیم که این ماتریس باید ماتریس صفر باشد.

ماتریس A متقارن است. $\to A^t = A \to A = A^t$

ماتریس A پادمتقارن است. $\to A^t = -A \to A = -A^t$

$\to A + A = A^t + (-A^t) \to ۲A = O \to A = O$

تذکر : اگر ماتریس A متقارن باشد، ماتریس rA نیز متقارن می باشد. همچنین اگر ماتریس A پادمتقارن باشد، ماتریس rA نیز پادمتقارن می باشد.

تمرین: اگر A یک ماتریس مربعی باشد. نشان دهید که

الف) ماتریس $M = A + A^t$ متقارن است. ب) ماتریس $N = A - A^t$ پاد متقارن است.

حل:

الف)

$$M^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = M$$

ب)

$$N^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -N$$

تمرین: نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می توان به شکل مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

حل: با توجه به تمرین های قبل اگر A یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس های $\frac{۱}{۲}M = \frac{۱}{۲}(A + A^t)$ متقارن و ماتریس $\frac{۱}{۲}N = \frac{۱}{۲}(A - A^t)$ پادمتقارن است. در این صورت:

$$\frac{۱}{۲}M + \frac{۱}{۲}N = \frac{۱}{۲}(A + A^t) + \frac{۱}{۲}(A - A^t) = \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۲}A^t + \frac{۱}{۲}A - \frac{۱}{۲}A^t = ۲(\frac{۱}{۲}A) = A$$

$$A = \frac{۱}{۲}(M + N)$$

تمرین : ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل :

$$M = A + A^t = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$N = A - A^t = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{۱}{۲}(M + N) \rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

تمرین برای حل : ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

***

دترمینان ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی مانند A عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می شود. این عدد با توجه به مرتبه ی ماتریس به روشی خاص بدست می آید. در اینجا فقط دترمینان ماتریس های مربعی مرتبه ی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

توجه : دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می دهند.

دترمینان ماتریس مربعی مرتبه ی ۲×۲

طبق تعریف دترمینان ماتریس ۲×۲ با تفاضل حاصل ضرب درایه های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه های قطر اصلی بدست می آید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$$

حل :

$$|A|=(-۱)(۴)-(۳)(۲)=-۴-۶=-۱۰$$

تمرین برای حل:

۱ : دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ -۶ & -۸\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

۲ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix}x & ۲-x\\ -۳ & x-۲\end{vmatrix}=۰$$

***

ماتریس کهاد(مینور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی، ماتریسی که از حذف سطر iام و ستون j ام بدست می آید را کهاد درایـه ی a_{ij} نامند و آنرا با M_{ij} نمایش می دهند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۲\\ ۰ & ۵ & -۳\\ ۲ & ۷ & -۴\end{bmatrix}$ در این صورت:

$$M_{۱۱}=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix} \quad و \quad M_{۲۳}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$$

***

همسازه ی(کوفاکتور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی همسازه ی درایه ی a_{ij} عددی است که به شکل زیر بدست می آید.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}|$$

مثال: همسازه ی درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \, |M_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

***

روش های محاسبه ی دترمینان ماتریس 3×3

در این قسمت روش های محاسبه ی دترمینان یک ماتریس 3×3 را بیان می کنیم.

الف : محاسبه ی دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط

با توجه به درایه های یک سطر(یا یک ستون) دلخواه و کهاد آنها می توان دترمینان یک ماتریس 3×3 را محاسبه کرد[3]. این روش را روش بسط نسبت به یک سطر (یا ستون) می نامند.

فرض کنید: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ در این صورت:

بسط نسبت به یک سطر دلخواه ($i=1$ یا $i=2$ یا $i=3$) $|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij}$

بسط نسبت به یک ستون دلخواه ($j=1$ یا $j=2$ یا $j=3$) $|A| = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} A_{ij}$

---

[1] – برای هر ماتریس مربعی $n \times n$ نیز به همین شکل عمل می شود.

مثال: بسط نسبت به سطر اول $i=۱$

$$|A| = a_{۱۱}A_{۱۱} + a_{۱۲}A_{۱۲} + a_{۱۳}A_{۱۳}$$

این روش محاسبه ی دترمینان یک ماتریس مربعی را روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون یا به اختصار **روش بسط**[۴] می نامند.

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل : کافی است یک سطر یا یک ستون دلخواه را انتخاب نموده و نسبت به آن بسط می دهیم.

مثلاً سطر سوم

$$|A| = (-۱)(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & -۳ \end{vmatrix} + (۱)(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix} + (۳)(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-۱)(۱)(-۶-۱۰) + (۱)(-۱)(-۹-۵) + (۳)(۱)(۶-۲)$$

$$|A| = ۱۶ + ۱۴ + ۱۲ = ۴۲$$

تمرین : دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل : به جهت وجود صفر های بیشتر، نسبت به سطر اول بسط می دهیم. لذا:

$$|A| = ۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ + ۱ = ۵$$

[4] . الف : در روش بسط بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر های بیشتری داشته باشد. ب : محاسبه ی دترمینان های ماتریس مربعی مرتبه ی ۴ و بالاتر نیز به همین شکل انجام می شود.

تمرین برای حل :

۱ : ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک سطر دلخواه بدست آورید.

ب) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک ستون دلخواه بدست آورید.

۲ : به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{bmatrix}$$

***

ب : محاسبه ی دترمینان ماتریس ۳×۳ به کمک ویژگی های دترمینان

به کمک ویژگی دترمینان می توان دترمینان یک ماتریس مربعی را محاسبه کرد. برای بیان این روش ابتدا ویژگی های دترمینان را بیان می کنیم.

در محاسبه ی دترمینان یک ماتریس به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون با ویژگی های جالبی برخورد می کنیم.این ویژگی ها بخصوص برای محاسبه ی دترمینان بدون استفاده از بسط بکار گرفته می شوند. این ویژگی ها عبارتند از:

ویژگی اول: دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی ، پایین مثلثی و قطری برابر با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{vmatrix}=abc$$

ویژگی دوم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی برابر صفر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{vmatrix} = ۰$$

ویژگی سوم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی در عدد ثابت k ضرب شوند.آنگاه دترمینان آن ماتریس k برابر می شود.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱۰ & ۲۰ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{\frac{۱}{۵}R2 \rightarrow R2}{=} ۵ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix}$$

نتیجه: اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت: $|rA| = r^n |A|$

ویژگی چهارم : اگر در یک ماتریس مربعی جای دو سطر یا دو ستون را جابجا کنیم، دترمینان آن در عدد (۱-) ضرب می شود.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R3}{=} -\begin{vmatrix} ۳ & ۹ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

ویژگی پنجم : اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1=R2}{=} ۰$$

ویژگی ششم : اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} -۱ & -۳ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳C1=C2}{=} ۰$$

ویژگی هفتم : اگر در یک ماتریس مربعی مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم،دترمینان آن تغییر نمی کند.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳R2+R1\to R1}{=} \begin{vmatrix} -۲ & ۹ & ۸ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی هشتم : دترمینان هر ماتریس مربعی و دترمینان ترانهاده اش با هم برابرند. $|A^t|=|A|$

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی نهم : دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه با حاصل ضرب دترمینان های آنها برابر است.

$$|AB|=|A||B|$$

توجه: این ویژگی فقط برای ضرب ماتریس ها برقرار است ولی برای جمع یا دو تفاضل دو ماتریس مربعی هم مرتبه برقرار نمی باشد.یعنی:

$$|A+B|\neq|A|+|B|$$
$$|A-B|\neq|A|-|B|$$

ویژگی دهم : برای هر ماتریس مربعی A داریم:

$$|A^k|=|A|^k$$

ویژگی یازدهم: اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون به صورت دو یا چند جمله ای باشند،آنگاه دترمینان این ماتریس را می توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

تمرین: بدون بسط دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ?$$

حل:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} \underset{۲R1+R3 \to R3}{\overset{۳R1+R2 \to R2}{=}} \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{vmatrix} = (-۱)(۱)(۱۰) = -۱۰$$

تمرین : بدون بسط ثابت کنید که $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۵$

حل:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} \overset{R۱ \leftrightarrow R۳}{=} -\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \overset{۲R۱+R۲ \to R۲}{=} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -(-۵) = ۵$$

تمرین: بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} \sin^۲ x & ۱ & \cos^۲ x \\ \sin^۲ y & ۱ & \cos^۲ y \\ \sin^۲ z & ۱ & \cos^۲ z \end{vmatrix} = ۰$$

حل:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_3\to C_3}{=} \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sin^2 x+\cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \sin^2 y+\cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \sin^2 z+\cos^2 z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & 1 \\ \sin^2 y & 1 & 1 \\ \sin^2 z & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2=C_3}{=} 0$$

تمرین برای حل : به کمک ویژگی های دترمینان ، دترمینان ماتریس ها زیر را محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

***

ج : محاسبه ی دترمینان های ماتریس 3×3 به روش ساروس

ابتدا ماتریس را دو بار کنار هم می نویسیم. سپس با توجه به شکل زیر حاصل ضرب های درایه هـای روی خط ها را محاسبه و مطابق شکل جمع و تفریق می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31})$$

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده ی ساروس تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل :

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(۳)(۲)(۴)+(۵)(۳)(-۱)+(۲)(۴)(۲)-(۳)(۳)(۲)-(۵)(۴)(۴)-(۲)(۲)(-۱)$$

$$|A|=۲۴-۱۵+۱۶-۱۸-۸۰+۸=۶۵$$

تمرین برای حل :

۱ : به روش ساروس دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ به کمک قاعده ی ساروس نشان دهید که

$$|A|=۳abc-(a^۳+b^۳+c^۳)$$

۳ : به کمک قاعده ی ساروس ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ a & ۰ & c \\ b & c & ۰ \end{vmatrix}=۲abc$$

***

ماتریس الحاقی

متناظر با هر ماتریس مربعی مانند A می توان ماتریس دیگری نظیر کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی می نامند5. روش تعیین ماتریس الحاقی با توجه به مرتبه ی ماتریس متفاوت است. در اینجا فقط ماتریس الحاقی ماتریس های مربعی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

توجه : ماتریس الحاقی ماتریس A را با نماد A^* نمایش می دهند.

***

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

برای مثال ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می شود $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

الف : دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید. ب : ماتریس الحاقی A را به دست آورید.

حل :

الف :

$$|A|=(۲)(۵)-(-۲)(۳)=۱۰+۶=۱۶$$

ب :

$$A^*=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

***

---

[5] . ترانهاده ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند

ماتریس الحاقی ماتریس ماتریس مربعی ۳×۳

ترانهاده ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند و آنرا با A^* نمایش می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \to N=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & A_{۱۳} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & A_{۲۳} \\ A_{۳۱} & A_{۳۲} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\to A^*=N^t=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$

تمرین: ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}|M_{۱۱}|=\begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱ \qquad A_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}|M_{۱۲}|=-\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=-۶$$

$$A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}|M_{۱۳}|=\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۲ \qquad A_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}|M_{۲۱}|=-\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۴$$

$$A_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}|M_{۲۲}|=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=۳ \qquad A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}|M_{۲۳}|=-\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=-۱$$

$$A_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}|M_{۳۱}|=\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix}=۱ \qquad A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}|M_{۳۲}|=-\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=۳$$

$$A_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}|M_{۳۳}|=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۲$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

توجه : این روش برای محاسبه ی ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ نیز درست است.

مثال: ماتریس الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} |M_{۱۱}| = d \qquad A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} |M_{۱۲}| = -c$$

$$A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} |M_{۲۱}| = -b \qquad A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} |M_{۲۲}| = a$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در نتیجه و همانطور قبلاً اشاره شد، ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه هـای روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

تمرین برای حل : ماتریس الحاقی ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های معکوس پذیر

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

تمرین برای حل :

نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹}\\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹}\end{bmatrix}$ است.

اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد.در این صورت وارون آن را به شکل $A^{-۱}$ نمایش می دهند. ثابت می شود که

۱ : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است

۲ : یک ماتریس مربعی وارون پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۳ : برای هر ماتریس مربعی مانند A همواره داریم: $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}$

تمرین: معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۴ & ۶\end{bmatrix}$

حل

الف: $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\to |A|=۲۰-۲۱=-۱\neq ۰ \quad \to$ لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A^{*}=\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{-۱} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۷ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب: لذا ماتریس B معکوس پذیر است. $\rightarrow$ $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix} \rightarrow |B| = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \quad \rightarrow$

تمرین: معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل:

لذا ماتریس A معکوس پذیر است. $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۹ \neq ۰$

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} |M_{۱۱}| = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱ \qquad A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} |M_{۱۲}| = -\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = -۶$$

$$A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳} |M_{۱۳}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲ \qquad A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} |M_{۲۱}| = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۴$$

$$A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} |M_{۲۲}| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۳ \qquad A_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳} |M_{۲۳}| = -\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$A_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱} |M_{۳۱}| = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۱ \qquad A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} |M_{۳۲}| = -\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۳$$

$$A_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} |M_{۳۳}| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۲$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{۹} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \end{bmatrix}$$

تذکر: اگر B و A دو ماتریس مربعی هم مرتبه و معکوس پذیر باشند. در این صورت

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $A^{-۱} =$ ب) $B^* =$ ج) $A^{-۱} + B^* + I_۲ =$

۲ : اگر $A = \begin{bmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{bmatrix}$. نشان دهید که : $|A| = \log^{\frac{۵}{۲}}$

۳ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(A^{-۱})^۲$ را تعیین کنید.

۴ : $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$. ثابت کنید که $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

۵ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد.حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $(A+B)^{-۱}$ ب) $A^{-۱} + B^{-۱}$

۶ : مقدار m را چنان بیابید که ماتریس زیر وارون پذیر نباشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲m+۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۷ : معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۶ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

***

محاسبه ی معکوس یک ماتریس مربعی به کمک اعمال سطری مقدماتی

اعمال زیر را **اعمال سطری مقدماتی** می نامند، می توان این اعمال را روی سطرهای یک ماتریس انجام داد و ماتریس دیگری متناظر با آن به دست آورید.

۱ : ضرب کردن یک سطر ماتریس در یک عدد حقیقی ناصفر

۲ : اضافه کردن یک سطر یا مضربی از آن به طرفین سطری دیگر

۳ : تعویض جای دو سطر در یک ماتریس

اگر ماتریس مربعی A معکوس پذیر باشد.آنرا در کنار ماتریس واحد هم مرتبه ی آن قرار می دهیم، سپس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ماتریس داده شده را به ماتریس واحد تبدیل می کنیم.در صورتی که همین اعمال را به طور همزمان روی ماتریس واحد انجام شوند، حاصل معکوس ماتریس اصلی خواهد بود.

$$[A\,|\,I]\xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}}[I\,|\,A^{-۱}]$$

تمرین: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است. $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\rightarrow |A|=۴-۳=۱\neq ۰$

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\3&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}3&2&0&1\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}-1&0&-2&1\\2&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\end{array}\right]=[I\,|\,A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$

تمرین: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}\to|A|=3\neq 0$$

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\3&1&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-4R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-5&-11&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{3}R_2+R_3\to R_3]{-\frac{2}{3}R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-6R_3+R_2\to R_2]{-R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&-1\\0&-3&0&18&11&-6\\0&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R\text{۳}\to R\text{۳}]{-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}R\text{۲}\to R\text{۲}}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \text{۱} & \text{۰} & \text{۰} & \text{۰} & -\text{۱} & -\text{۱} \\ \text{۰} & \text{۱} & \text{۰} & -\text{۶} & -\frac{\text{۱۱}}{\text{۳}} & \text{۲} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۱} & -\frac{\text{۱۱}}{\text{۳}} & \frac{\text{۵}}{\text{۳}} & -\text{۱} \end{array}\right]=[I\mid A^{-\text{۱}}]\Rightarrow A^{-\text{۱}}=\begin{bmatrix} \text{۰} & -\text{۱} & -\text{۱} \\ -\text{۶} & -\frac{\text{۱۱}}{\text{۳}} & \text{۲} \\ -\frac{\text{۱۱}}{\text{۳}} & \frac{\text{۵}}{\text{۳}} & -\text{۱} \end{bmatrix}$$

تمرین برای حل :

معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود به روش اعمال سطری مقدماتی بدست آورید.

ب) $B=\begin{bmatrix} \text{۱} & -\text{۱} & \text{۱} \\ \text{۲} & \text{۰} & -\text{۱} \\ \text{۰} & \text{۱} & \text{۳} \end{bmatrix}$

الف) $A=\begin{bmatrix} \text{۵} & \text{۷} \\ \text{۳} & \text{۴} \end{bmatrix}$

***

موفق باشید.

***