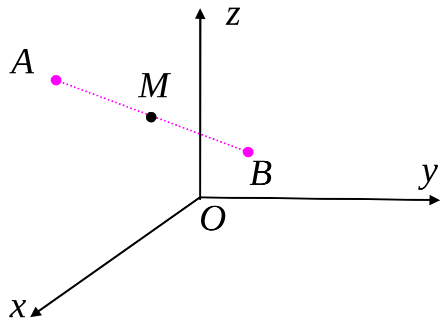
فاصله‌ی دو نقطه در فضا

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $B(a_۲,b_۲,c_۲)$ و $A(a_۱,b_۱,c_۱)$ در فضا از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$AB=\sqrt{(a_۲-a_۱)^۲+(b_۲-b_۱)^۲+(c_۲-c_۱)^۲}$$

حالت خاص : فاصله‌ی هر نقطه مانند $A(a,b,c)$ از مبدأ مختصات به صورت زیر است.

$$OA=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$



***

مختصات نقطه ی وسط پاره خط

مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB در فضا از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$x_M=\frac{a_۱+a_۲}{۲} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{b_۱+b_۲}{۲} \quad \text{و} \quad z_M=\frac{c_۱+c_۲}{۲}$$

***

تمرین ۱ : اگر $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,۱,-۱)$ دو نقطه در فضای $R^۳$ باشند.

الف : مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را بدست آورید.

ب : طول پاره خط AB را تعیین کنید.

حل :

$$x_M=\frac{a_۱+a_۲}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲$$

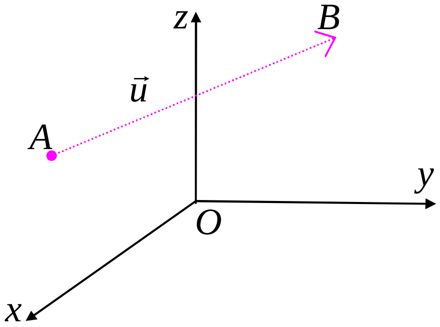
$$y_M=\frac{b_۱+b_۲}{۲}=\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$z_M = \frac{c_۱ + c_۲}{۲} = \frac{۲ + (-۱)}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow M(۲ , \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲})$$

***

بردار ها در فضای $R^۳$



هر پاره خط جهت دار که ابتدای آن نقطه‌ی A و انتهای آن نقطه‌ی B باشد، را یک پیکان می نامند و آن را با $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{u}$ نمایش می دهند.

اگر در پیکان $\overrightarrow{AB}$ نقاط A و B بر هم منطبق باشند،آن پیکان را پیکان صفر می نامند و آن را با نماد $\overrightarrow{O}$ نمایش می دهند.

هر پیکان دارای مختصاتی به صورت زیر است.

$$\overrightarrow{AB} = (a_۲ - a_۱ , b_۲ - b_۱ , c_۲ - c_۱)$$

طول پاره خط AB متناظر با پیکان $\overrightarrow{AB}$ را اندازه یا طول پیکان $\overrightarrow{AB}$ می نامند و آن به صورت $\|\overrightarrow{AB}\|$ نمایش می دهند. واضح است که:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(a_۲ - a_۱)^۲ + (b_۲ - b_۱)^۲ + (c_۲ - c_۱)^۲}$$

نتیجه:

۱ : مختصات هر بردار با مختصات نقطه‌ی انتهایی آن برابر است.

۲ : اندازه‌ی بردار مکان نقطه‌ی $A(a,b,c)$ به صورت زیر است.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

۳ : برای هر بردار $\vec{u}=(a,b,c)$ همواره داریم:

$$\|\vec{u}\|^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$$

۴ : هر بردار که انتهای آن مبدأ مختصات باشد را بردار صفر می نامند. لذا مختصات این بردار $\vec{o}=(۰,۰,۰)$ می باشد. توجه داشته باشید که اندازه‌ی بردار صفر برابر صفر است.

❋❋❋

تمرین۲ : بردار $\vec{u}=(۱,۲,-۲)$ داده شده است.

الف : مختصات انتهایی بردار $\vec{u}$ را بدست آورید.

ب : اندازه‌ی بردار $\vec{u}$ را محاسبه کنید.

حل :

الف) $P(۱,۲,-۲)$

ب) $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}=\sqrt{(۱)^{۲}+(۲)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۱+۴+۴}=\sqrt{۹}=۳$

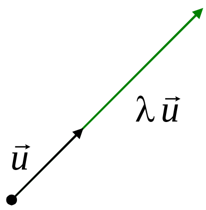
❋❋❋

❋❋❋

ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{u}=(a,b,c)$ یک بردار و λ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $\lambda\vec{u}$ برداری است که از ضرب عدد λ در تمام مولفه های $\vec{u}$ بدست می آید.

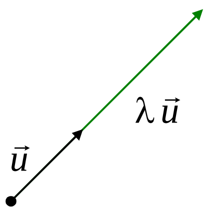
$$\lambda\vec{u}=\lambda(a,b,c)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$$



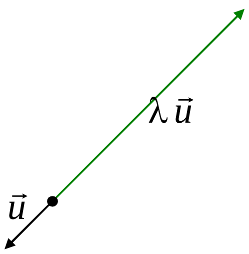
توجه داشته باشید که :

۱ : اگر $\lambda=0$ باشد، $\lambda\vec{u}=\vec{o}$

۲ : اگر $\lambda>0$ باشد، بردار های $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ هم جهت هستند.



۳ : اگر $\lambda<0$ باشد، بردار های $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ در جهت مخالف همدیگر هستند.



۴ : اگر $\lambda=1$ باشد، $\lambda\vec{u}=\vec{u}$

۵ : اگر $\lambda=-1$ باشد، $\lambda\vec{u}=-\vec{u}$

۶ : در هر صورت $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\,\|\vec{u}\|$

نتیجه :

۱ : حاصل ضرب عدد ۱- در بردار غیر صفر $\vec{u}$ یعنی $(-۱)\vec{u}$ را قرینه‌ی بردار $\vec{u}$ می نامند و آن را با $-\vec{u}$ نمایش می دهند.

۲ : دو بردار غیر صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازیند، هرگاه وجود داشته باشد عدد حقیقی غیر صفر λ بطوری که $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

***

تمرین ۱ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u} = (۶,۳,-۹)$ و $\vec{v} = (۲,۱,-۳)$ موازی یکدیگرند.

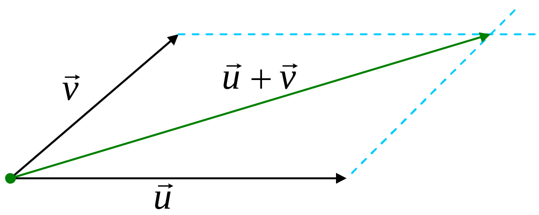
حل : کافی است که نشان دهیم یک عدد حقیقی پیدا می شود که با ضرب آن در یکی از بردار ها، بـردار دیگـر حاصل می شود. با قدری دقت در اینجا، واضح است که $\vec{u} = ۳\vec{v}$ و لذا $\vec{u} \parallel \vec{v}$

***

جمع دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل جمع این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

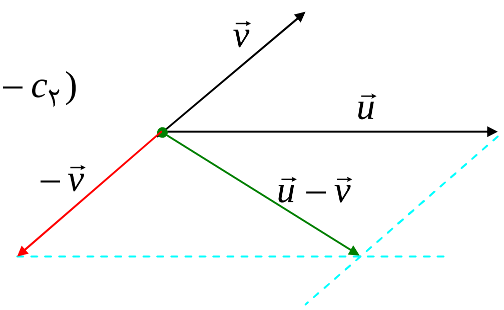
$$\begin{aligned} \vec{u} &= (a_۱, b_۱, c_۱) \\ \vec{v} &= (a_۲, b_۲, c_۲) \\ \vec{u} + \vec{v} &= (a_۱ + a_۲ \ , b_۱ + b_۲ \ , c_۱ + c_۲) \end{aligned}$$



تفریق دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل تفریق این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (a_۱, b_۱, c_۱) \\ \vec{v} &= (a_۲, b_۲, c_۲) \\ \vec{u} - \vec{v} &= \vec{u} + (-\vec{v}) = (a_۱ - a_۲ \ , b_۱ - b_۲ \ , c_۱ - c_۲) \end{aligned}$$



تمرین ۲ : اگر $\vec{u}=(۵,۳,۰)$ و $\vec{v}=(-۱,۲,۳)$ مطلوبست محاسبه‌ی

الف) $-۲\vec{u}$ ب) $\vec{u}+\vec{v}$ ج) $\vec{u}-\vec{v}$

حل :

الف) $-۲\vec{u}=-۲(۵,۳,۰)=(-۱۰,-۶,۰)$

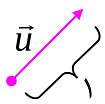
ب) $\vec{u}+\vec{v}=(۵,۳,۰)+(-۱,۲,۳)=(۴,۵,۳)$

ج) $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(۵,۳,۰)+(۱,-۲,-۳)=(۶,۱,-۳)$

***

بردار واحد

هر بردار که اندازه‌ی آن یک واحد طول باشد، را بردار واحد (یکّه) می نامند.



$$\|\vec{u}\|=۱$$

تمرین ۳ : نشان دهید که بردار $\vec{u}=(\frac{۱}{۴},\frac{\sqrt{۱۱}}{۴},-\frac{۱}{۲})$ بردار واحد است.

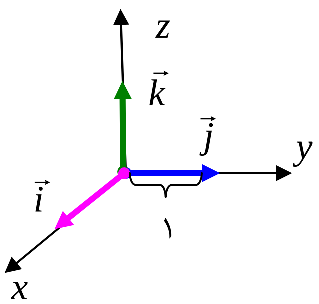
حل :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۱}}{۴})^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱۱}{۱۶}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱۱}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}}=۱$$

***

بردار های واحد مختصات

در فضای سه بعدی $R^۳$ بردار های واحد $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ که به ترتیب در جهت مثبت محور طول ها، عرض ها و ارتفاع ها قرار دارند را بردار های یکه‌ی استاندارد یا بردارهای واحد مختصات می نامند.



هر بردار را می توان بر حسب بردار های واحد مختصات نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a,b,c)\\ &= (a,۰,۰)+(۰,b,۰)+(۰,۰,c)\\ &= a(۱,۰,۰)+b(۰,۱,۰)+c(۰,۰,۱)\\ &= a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\end{aligned}$$

تمرین ۴ : اگر $\vec{u}=۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}$

الف : مختصات بردار $\vec{u}$ را بنویسید. ب : اندازه ی بردار $\vec{u}$ را محاسبه کنید.

حل :

الف) $\vec{u}=(۲,-۱,۳)$

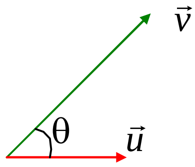
ب) $\|\vec{u}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$

❉❉❉

❋❋❋

ضرب داخلی دو بردار

تعریف هندسی ضرب داخلی : اگـر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بـردار غیـر صـفر باشـند و θ کوچکترین زاویه ی بین آنها در نظر گرفته شـود. در ایـن صـورت ضـرب داخلـی (ضرب نقطه ای) دو بردار را با $\vec{u}.\vec{v}$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می کنند.



$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

❋❋❋

تمرین۱ : اگر $\|\vec{v}\| = \sqrt{۳}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{۱۲}$ و زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر۳۰ درجه باشد. حاصل ضـرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \sqrt{۱۲}\times\sqrt{۳}\times\cos ۳۰ = ۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

❋❋❋

تعریف تحلیلی ضرب داخلی: اگر $\vec{u} = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\vec{v} = (a_۲, b_۲, c_۲)$ دو بردار در فضای سه بعـدی باشند، آنگاه ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u}.\vec{v} = a_۱a_۲ + b_۱b_۲ + c_۱c_۲$$

تمرین۲ : اگر $\vec{u}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{v}=(-۱,۱,۳)$ آنگاه مطلوبست تعیین :

الف) $\vec{u}.\vec{v}=$ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$

حل :

الف) $\vec{u}.\vec{v}=(۰)(-۱)+(۲)(۱)+(۱)(۳)=۰+۲+۳=۵$

ب) $\vec{u}+\vec{v}=(-۱,۳,۴)$ و $\vec{u}-\vec{v}=(۱,۱,-۲)$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=(-۱)(۱)+(۳)(۱)+(۴)(-۲)=-۱+۳-۸=-۶$$

نتیجه : حاصل ضرب داخلی دو بردار همیشه یک عدد حقیقی است.

***

تمرین۳ : اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی باشند و $\vec{u}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{u}.\vec{v}=۱۵$ مختصات بردار $\vec{v}$ را تعیین کنید.

حل :

$$\vec{u}\parallel\vec{v}\xrightarrow{\exists r\in R}\vec{v}=r\vec{u}\rightarrow\vec{v}=r(۱,-۲,۲)=(r,-۲r,۲r)$$

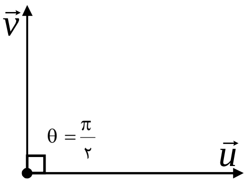
$$\vec{u}.\vec{v}=۱۵\rightarrow(۱)(r)+(-۲)(-۲r)+(۲)(۲r)=۱۵\rightarrow r+۴r+۴r=۱۵\rightarrow r=\frac{۱۵}{۹}=\frac{۵}{۳}$$

$$\therefore\vec{v}=(r,-۲r,۲r)=(\frac{۵}{۳},\frac{-۱۰}{۳},\frac{۱۰}{۳})$$

***

نتیجه : دو بردار بر هم عمودند، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و بـرعکس

یعنی :



برای هر دو بردار غیـر صـفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بـردار $\vec{u}$ بـر $\vec{v}$ عمـود اسـت، اگـر و فقـط اگر $\vec{u}.\vec{v}=۰$ و بر عکس

$$\vec{u}\perp\vec{v}\leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=۰$$

***

تمرین۴ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(-۴,۵,۷)$ و $\vec{v}=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v}=(-۴)(۱)+(۵)(-۲)+(۷)(۲)=-۴-۱۰+۱۴=۰\rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

***

تمرین۵ : اگر $A(۴,۹,۱)$ و $B(۶,۳,-۲)$ و $C(-۲,۶,۳)$. سه رأس مثلث ABC باشند، نشان دهید که این مثلث قائم الزاویه است.

حل : می دانیم متناظر با هر پیکان یک بردار مساوی آن وجود دارد. حال نشان می دهیم که بردار های متناظر با دو ضلع از مثلث فوق بر هم عمودند. قرار می دهیم:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(۶-۴,۳-۹,-۲-۱)=(۲,-۶,-۳)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(-۲-۴,۶-۹,۳-۱)=(-۶,-۳,۲)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=(۲)(-۶)+(-۶)(-۳)+(-۳)(۲)=-۱۲+۱۸-۶=۰\rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

***

تعیین زاویه‌ی بین دو بردار

اگر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین آنها باشد.در این صورت:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\qquad ۰\le\theta\le\pi$$

توجه : زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ کوچکترین زاویه ای است که این دو بردار با هم تشکیل می دهند.

تمرین۶ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}=(۲,-۱,۱)$ و $\vec{v}=(۱,۱,۲)$ را بیابید.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v}=(۲)(۱)+(-۱)(۱)+(۱)(۲)=۳$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

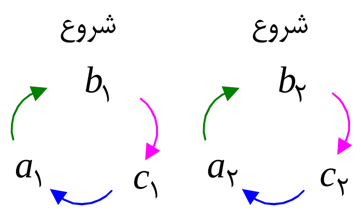
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{(۱)^{۲}+(۱)^{۲}+(۲)^{۲}}=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{۳}{\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\angle\theta=\frac{\pi}{۳}$$

***

ضرب خارجی دو بردار

فرض کنیم که $\vec{u}=(a_۱,b_۱,c_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲,c_۲)$ دو بردار باشند. ضـرب خـارجی (ضـرب بـرداری) $\vec{u}$ در $\vec{v}$ را که با نماد $\vec{u}\times\vec{v}$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم.



مؤلفه های بردار اوّل بالا و مؤلفه های بردار دوم پایین قرار می گیرند.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}b_۱ & c_۱\\ b_۲ & c_۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_۱ & a_۱\\ c_۲ & a_۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_۱ & b_۱\\ a_۲ & b_۲\end{vmatrix}\right)=(b_۱c_۲-b_۲c_۱,a_۲c_۱-a_۱c_۲,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

***

تمرین۷ : اگر $\vec{u}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{v}=(-۱,-۲,۴)$. در این صورت بردار های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{u}\times\vec{v}=$ ب) $\vec{v}\times\vec{u}=$ ج) $\vec{u}\times\vec{u}=$

حل :

الف :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۲ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۴ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & -۲\end{vmatrix}\right)=(۲,-۱۱,-۵)$$

ب :

$$\vec{v}\times\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}-۲ & ۴\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}\right)=(-۲,۱۱,۵)$$

ج :

$$\vec{u}\times\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

نتیجه:

۱ : ضرب خارجی دو بردار همواره یک بردار است. **۲ :** ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد.

***

تمرین۸ : اگر $\vec{u}=(۱,-۱,۰)$ و $\vec{v}=(۲,۱,-۱)$. مطلوبست تعیین بردار $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})$

حل :

$$\vec{u}-\vec{v}=(۱,-۱,۰)-(۲,۱,-۱)=(-۱,-۲,۱)$$
$$\vec{u}+\vec{v}=(۱,-۱,۰)+(۲,۱,-۱)=(۳,۰,-۱)$$
$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=\left(\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۲,۲,۶)$$

***

تمرین ۹ : اگر $\vec{u}=۲\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}=(۲,۱,۱)$$
$$\vec{v}=(۱,-۱,۲)$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۳,-۳,-۳)$$
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۳)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۹+۹+۹}=۳\sqrt{۳}$$

***

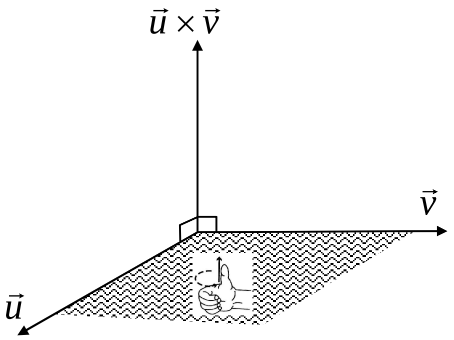
تمرین۱۰: نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۱,۲,-۳)$ و $\vec{v}=(-۳,-۶,۹)$ موازی همدیگرند.

حل :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}۲ & -۳\\ -۶ & ۹\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۳ & ۱\\ ۹ & -۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & -۶\end{vmatrix}\right)=(۱۸-۱۸,۹-۹,-۶+۶)=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

$$\rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

***



نتیجه : اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار ناموازی و غیر صفر باشند، در این صورت $\vec{u}\times\vec{v}$ نیز غیر صفر بوده و هم بر $\vec{u}$ و هم بر $\vec{v}$ عمود است و لذا بر صفحه‌ی شامل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود خواهد بود.

به کمک دست راست اگر انگشتان دست از طرف $\vec{u}$ به طرف $\vec{v}$ باشند، انگشت شست در جهت $\vec{u}\times\vec{v}$ قرار می گیرد. (قاعده‌ی دست راست)

***

تمرین۱۱ : برداری پیدا کنید که بر هر دو بردار $\vec{u}=(۴,-۱,۳)$ و $\vec{v}=(۲,۳,-۱)$ عمود باشد.

حل: کافی است که یکی از دو بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ یا $\vec{v}\times\vec{u}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ ۳ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ -۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}\right)=(-۸,۱۰,۱۴)$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۸,-۱۰,-۱۴)$$

***

تمرین۱۲: برداری به طول واحد بیابید که بر بردار های $\vec{u}=(۱,۲,۲)$ و $\vec{v}=(-۱,۲,-۲)$ عمود باشد.

حل :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{vmatrix}\right)=(-۸,۰,۴)\rightarrow\begin{cases}(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}\\ (\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}\end{cases}$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(-۸)^{۲}+(۰)^{۲}+(۴)^{۲}}=\sqrt{۶۴+۰+۱۶}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

$$e_{(\vec{u}\times\vec{v})}=\frac{۱}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}(\vec{u}\times\vec{v})=\frac{۱}{۴\sqrt{۵}}(-۸,۰,۴)=(\frac{-۲}{\sqrt{۵}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}})$$

***

اندازه‌ی بردار حاصل ضرب خارجی

برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ که زاویه‌ی بین آنها θ (کوچکترین زاویه‌ی بین آنها) است.داریم:

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$$

تمرین۱۳ : اگر $\|\vec{u}\|=۱۰$ و $\|\vec{v}\|=۶$ و زاویه‌ی بین دو بردار ۳۰ درجه باشد. اندازه‌ی بردار ضرب خارجی این دو بردار را محاسبه کنید.

حل :

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta=۱۰\times۶\times\sin۳۰=۱۰\times۶\times\frac{۱}{۲}=۳۰$$

***

❋❋❋

رابطه‌ی بین ضرب خارجی و ضرب داخلی دو بردار

برای هر دو بردارغیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$. ثابت کنید که

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^{۲}=\|\vec{u}\|^{۲}\|\vec{v}\|^{۲}-(\vec{u}.\vec{v})^{۲}$$

تمرین۱ : اگر $\|\vec{u}\|=۱۰$ و $\|\vec{v}\|=۲$ و $\vec{u}.\vec{v}=۱۲$ اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را بیابید.

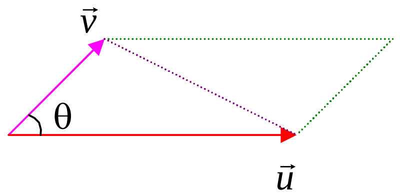
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^{۲}=\|\vec{u}\|^{۲}\|\vec{v}\|^{۲}-(\vec{u}.\vec{v})^{۲}=۱۰^{۲}\times ۲^{۲}-(۱۲)^{۲}=۴۰۰-۱۴۴=۲۵۶$$

$$\rightarrow\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{۲۵۶}=۱۶$$

❋❋❋

مساحت متوازی الاضلاع

برای هر دو بردار غیر صفر و غیر موازی $\vec{v}$ و $\vec{u}$ که زاویه‌ی بین آنها θ (کوچکترین زاویه‌ی بین آنها) است. می توان یک متوازی الاضلاع به شکل زیر ساخت. در این صورت مساحت متوازی الاضلاع از رابطه های زیر بدست می آید.



$\theta\neq ۰,\pi$

$S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ مساحت متوازی الاضلاع

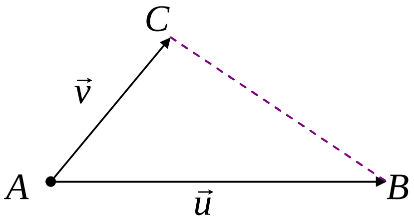
نتیجه: مساحت مثلثی که با دو بردار غیر موازی و غیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ تولید می شود، برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

***

تمرین۲: مساحت مثلثی را حساب کنید که $A(۱,۲,۰)$ و $B(۳,۰,-۳)$ و $C(۵,۲,۶)$ سه رأس آن باشند.

حل : تعریف می کنیم:



$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(۳-۱,۰-۲,-۳-۰)=(۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(۵-۱,۲-۲,۶-۰)=(۴,۰,۶)$$

در این صورت:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-۲ & -۳\\ ۰ & ۶\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۳ & ۲\\ ۶ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۴ & ۰\end{vmatrix}\right)=(-۱۲,-۲۴,۸)$$

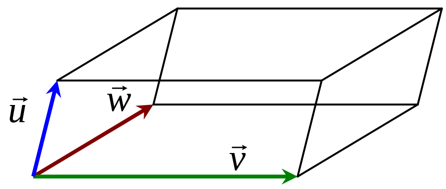
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(-۱۲)^۲+(-۲۴)^۲+(۸)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۵۷۶+۶۴}=\sqrt{۷۸۴}=۲۸$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\frac{۱}{۲}\times ۲۸=۱۴$$

***

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه باشند. در این صورت با این سه بردار یک متوازی السطوح تشکیل می شود. حجم متوازی السطوح را می توان به شکل زیر محاسبه نمود.



حجم متوازی السطوح $V=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$

***

تمرین۳: اندازه‌ی ارتفاع و حجم متـوازی الـسطوحی را حـساب کنیـد کـه توسـط بـردار هـای $\vec{u}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{v}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۱,۰,۱)$ تولید می شود.

حل :

$$\vec{v}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix} ۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۱,۱,-۱)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(۱)(۱)+(۱)(۱)+(۰)(-۱)=۲$$

$$\|\vec{v}\times\vec{w}\|\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

ارتفاع متوازی السطوح $h=\vec{u}'=\dfrac{|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}=\dfrac{۲}{\sqrt{۳}}$

حجم متوازی السطوح $V=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|=۲$

***

نتیجه : بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ روی یک صفحه واقعند اگر و فقط اگر حجم متوازی السطوحی که با این سـه بردار ساخته می شود برابر صفر باشد. یعنی $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=۰$

***

تمرین۴ : نشان دهید که سه بردار $\vec{u}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۰,۰,۱)$ روی یک صفحه واقعند.

حل: کافی است نشان دهیم که $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=۰$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix} ۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۱ & ۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۱,-۱,۰)$$

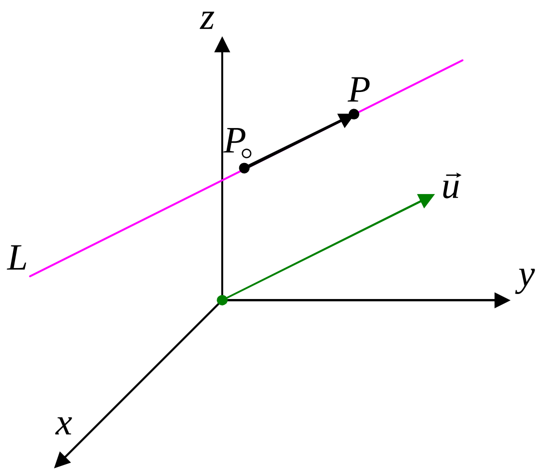
$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(۱)(۱)+(۱)(-۱)+(۰)(۰)=۰$$

***

***

معادلات خط و صفحه در فضا

الف) خط در فضا



اگر $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطه ی معلـومی از خـط L و بردار ناصفر $\vec{u} = (p, q, r)$ که موازی با L باشد را به طور منحصر بفـرد داشـته باشـیم. در ایـن صـورت معادله ی خط L را می تـوان بـه شـکل هـای زیـر نوشت:

معادلات پارامتری خط

$$\begin{cases} x = x_\circ + pt \\ y = y_\circ + qt \\ z = z_\circ + rt \end{cases}$$

معادلات متعارف خط (معادلات دکارتی)

$$\frac{x - x_\circ}{p} = \frac{y - y_\circ}{q} = \frac{z - z_\circ}{r}$$

توجه : بردار $\vec{u}$ که موازی خط L است را بردار هادی خط L می نامند که همواره امتداد خـط L را نـشان مـی دهد.

تمرین۱ : خطی از نقطه‌ی $P_{\circ}(۲\,,-۴\,,۱)$ می گذرد و موازی با بردار $\vec{u}=(۳\,,۲\,,-۱)$ است .

الف : معادلات پارامتری این خط را بنویسید. ب : معادلات متعارف این خط را بنویسید.

حل :

الف: معادلات پارامتری خط

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+pt \\ y=y_{\circ}+qt \\ z=z_{\circ}+rt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۲+۳t \\ y=-۴+۲t \\ z=۱-t \end{cases}$$

ب : معادلات متعارف خط

$$\frac{x-x_{\circ}}{p}=\frac{y-y_{\circ}}{q}=\frac{z-z_{\circ}}{r} \rightarrow \frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۴}{۲}=\frac{z-۱}{-۱}$$

تمرین ۲ : معادلات متعارف خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $P_{۱}(۴\,,-۶\,,۵)$ و $P_{۲}(۲\,,-۳\,,۰)$ می گذرد.

حل: کافی است که امتداد خط را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{u}=\overrightarrow{P_{۱}P_{۲}}=(۲-۴,-۳+۶,۰-۵)=(-۲,۳,-۵)$$

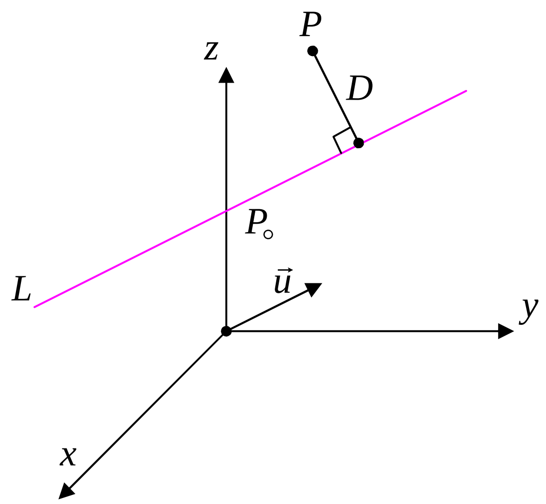
حال یکی از نقاط داده شده ، مثلاً $P_{۲}(۲\,,-۳\,,۰)$ قرار دهیم : $(x_{\circ}=۲\,,y_{\circ}=-۳\,,z_{\circ}=۰)$

و لذا معادله‌ی خط به شکل زیر خواهد شد.

$$\frac{x-x_{\circ}}{p}=\frac{y-y_{\circ}}{q}=\frac{z-z_{\circ}}{r} \rightarrow \frac{x-۲}{-۲}=\frac{y+۳}{۳}=\frac{z}{-۵}$$

❋❋❋

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط



فرض کنیم L خطی باشد که با بردار غیر صفر $\vec{u}$ موازی است و P را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) L قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه ی P از خط L یعنی D برابر است با:

$$D=\frac{\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|}{\|\vec{u}\|}$$

که در آن $P_\circ$ نقطه ی دلخواهی از صفحه است.

تمرین ۳ : فاصله‌ی نقط ی $P(۵,-۶,۲)$ را از خط L به معادلات پارامتری زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱+۴t \\ z=۲-۳t \end{cases}$$

حل: نقطه‌ی $P_\circ(۱,-۱,۲)$ را روی خط L در نظر می گیریم. بردار $\vec{u}=(۰,۴,-۳)$ موازی L است. پس:

$$\overrightarrow{P_\circ P}=(۵-۱,-۶+۱,۲-۲)=(۴,-۵,۰)$$

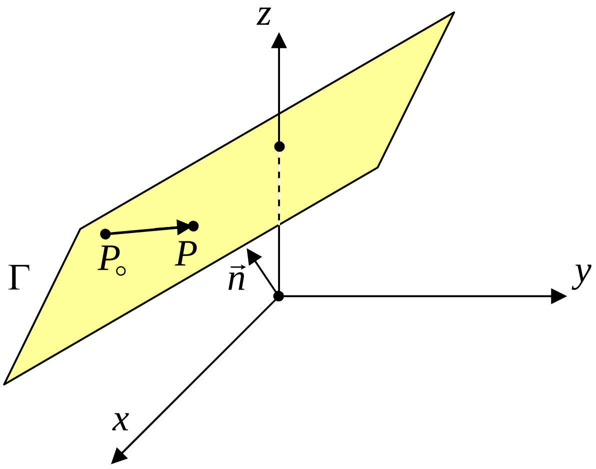
$$\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}=(-۱۵,-۱۲,-۱۶)$$

$$\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|=\sqrt{(-۱۵)^۲+(-۱۲)^۲+(-۱۶)^۲}=\sqrt{۶۲۵}=۲۵$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(۰)^۲+(۴)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$\therefore D=\frac{\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

ب) صفحه در فضا



هر صفحه در فضای $R^۳$ با یک نقطه روی آن و یک بردار که بر آن صفحه عمود است مشخص می شود.

اگر $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ یک نقطه از صفحه و بردار غیر صفر $\vec{n} = (a,b,c)$ عمود بر آن صفحه باشد و $P(x,y,z)$ نقطه‌ی دلخواهی از آن فرض شود.

آنگاه معادله‌ی صفحه به صورت زیر خواهد بود.

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

توجه : بردار n را بردار نرمال صفحه‌ی Γ می نامند. بردار نرمال صفحه همواره بر آن صفحه عمود است.

تمرین ۴ : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,\ ۳,-۱)$ گذشته و بر بردار $\vec{n} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} + ۵\vec{k}$ عمود باشد.

حل:

$$\vec{n} = ۳i - ۲j + ۵k = (۳,-۲,۵)$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

$$\to ۳(x-۲)-۲(y-۳)+۵(z+۱)=۰ \to ۳x-۲y+۵z=-۵$$

تمرین ۵ : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-۳,۲,۱)$ گذشته و بر خط $\frac{x}{۳} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z+۳}{-۱}$ عمود باشد.

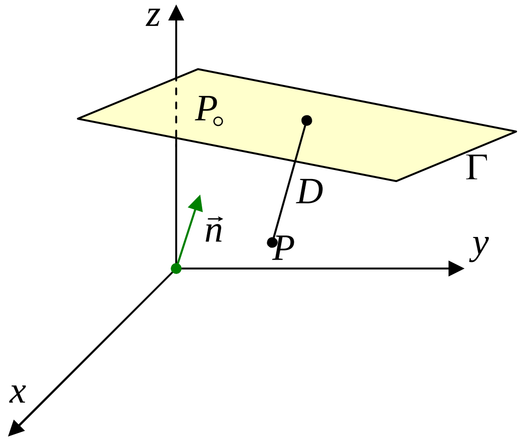
حل: چون صفحه و خط بر هم عمودند، پس بردار نرمال صفحه می تواند بردار هادی خط باشد.

$$\vec{n} = \vec{u} = (۳,۲,-۱)$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

$$۳(x+۳)+۲(y-۲)-(z-۱)=۰ \to ۳x+۲y-z=-۶$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه



فرض کنیم Γ صفحه ای باشد که بر بردار غیر صفر $\vec{n}$ عمود است و P را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) Γ قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه‌ی P از صفحه‌ی Γ یعنی D برابر است با:

$$D = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}|}{\|\vec{n}\|}$$

که در آن $P_\circ$ نقطه‌ی دلخواهی از صفحه است.

تمرین ۶: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۰,\ ۲,۱)$ را از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $x+y+\sqrt{۲}z+۲-\sqrt{۲}=۰$ بدست آورید.

حل:

$$P_\circ \in \Gamma \to P_\circ(\sqrt{۲},-۲,۰)$$

$$\vec{n}=(۱,۱,\sqrt{۲}) \qquad\qquad \overrightarrow{P_\circ P}=(-\sqrt{۲},۴,۱)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}=۱(-\sqrt{۲})+۴(۱)+۱(\sqrt{۲})=۴$$

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{۱+۱+۲}=۲$$

$$D=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{۴}{۲}=۲$$

نتیجه: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $ax+by+cz+d=۰$ به صورت زیر است.

$$D=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

تمرین۷ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۰, ۲, ۱)$ را از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $x + y + \sqrt{۲}z + ۲ - \sqrt{۲} = ۰$ بدست آورید.

حل:

$$D = \frac{|ax_۱ + by_۱ + cz_۱ + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$$= \frac{|(۱)(۰) + (۱)(۲) + (\sqrt{۲})(۱) + (۲ - \sqrt{۲})|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + (\sqrt{۲})^۲}} = \frac{|۲ + \sqrt{۲} + ۲ - \sqrt{۲}|}{\sqrt{۴}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

***

پایان

فصل ۲: توابع چند متغیره

توابع چند متغیره

تاکنون با توابع حقیقی یک متغیره آشنا شده ایم. اگرچه بسیاری از پدیده ها را توسط این توابع توصیف می شوند، ولی اغلب کمیت های فیزیکی و اقتصادی در واقع به بیش از یک متغیر وابسته هستند. به عنوان مثال حجم مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع آن بستگی دارد. هزینه کل یک واحد صنعتی بستگی به حقوق کارکنان ، مواد اولیه ، تجهیزات و .... است. هر تابع که با چند متغیر وابسته است را تابع چند متغیره می نامند. در این فصل با این توابع و ویژگی های آنها آشنا شده و در ادامه به تعمیم مفهوم مشتق و کاربرد های آن می پردازیم.

تعریف : اگر R مجموعه ی اعداد حقیقی باشد. هر تابع که دامنه ی آن R^n و برد آن R را یک تابع n متغیره می نامند. به عبارتی ساده تر تابع n متغیره ی ، به تعداد n عدد مرتب حقیقی می گیرد و یک یک عدد حقیقی می دهد. برای مثال:

$y = f(x)$ تابع یک متغیره

$y = f(x_۱, x_۲)$ تابع دو متغیره

$y = f(x_۱, x_۲, x_۳)$ تابع سه متغیره

مثال : تابع $f(x, y) = ۳x^۲ - ۴y$ یک تابع دو متغیره است. مقدار $f(۱,۲)$ را بدست آورید.

$f(۱,۲) = ۳(۱)^۲ - ۴(۲) = ۳ - ۸ = -۵$

تمرین : تابع سه متغیره ی $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - ۳z + ۱$ را در نظر بگیرید.مقدار $f(۱۰,۵,۱)$ را محاسبه کنید.

$$f(۱۰,۵,۱,) = \frac{۱۰}{۵} - ۳(۱) + ۱ = ۲ - ۳ + ۱ = ۰$$

همانطور که انتظار می رود ، دامنه ی یک تابع چند متغیره زیر مجموعه ای از R^n می باشد، به شرط اینکه به ازای تمام اعضای آن تابع داده شده تعریف شده باشد.

مثال : دامنه ی تابع $f(x, y) = \frac{x + ۳}{y - ۱}$ مجموعه ی $D_f = \{(x, y) \in R^۲ \mid y \neq ۱\}$ می باشد. زیرا مخرج کسر نباید صفر شود.

تذکر : در این فصل فقط به بررسی توابع دو متغیره می پردازیم و در مواردی محدود به توابع سه متغیره اشاره می کنیم.

تمرین : تابع $f(x,y)=\dfrac{۱}{x-y}$ را در نظر بگیرید.

الف : مقدار $f(۶,۴)$ را محاسبه کنید.

ب : دامنه ی این تابع را تعیین کنید.

حل :

$$f(۶,۴)=\frac{۱}{۶-۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$D_f=\{(x,y)\in R^۲ \mid x\neq y\}$$

تمرین : تابع $f(x,y)=\sqrt{x}+۳y$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

ب) مقدار $f(۴,۱)$ را حساب کنید.

حل : زیر رادیکال نباید منفی باشد.پس :

$$D_f=\{(x,y)\in R^۲ \mid x\geq ۰\}$$

$$f(۴,۱)=\sqrt{۴}+۳(۱)=۲+۳=۵$$

تمرین برای حل :

تمرین : تابع $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲-۹}$ را در نظر بگیرید.

الف : مقدار $f(۵,-۱)$ را محاسبه کنید.

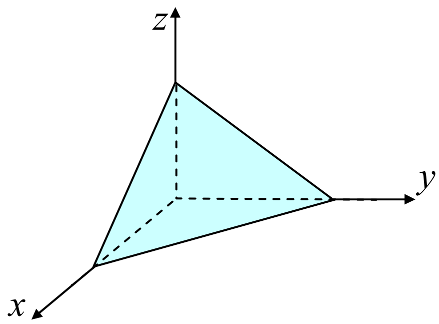
ب : دامنه ی این تابع را تعیین کنید.

***

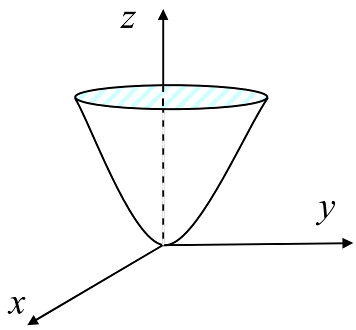
نمودار توابع دو متغیره

نمودار توابع دو متغیره فقط در فضای سه بعدی قابل ترسیم است. برای مثال تابع $z=f(x,y)$ دو مقدار برای x و y می گیرد و مقدار برای z می دهد. به همین دلیل نمودار های اینگونه توابع در فضای سه بعدی نمایش داده می شوند. نمودار هر تابع دو متغیره را رویه (و به در حالتی خاص سطح) می نامند. به نمونه های زیر توجه کنید.

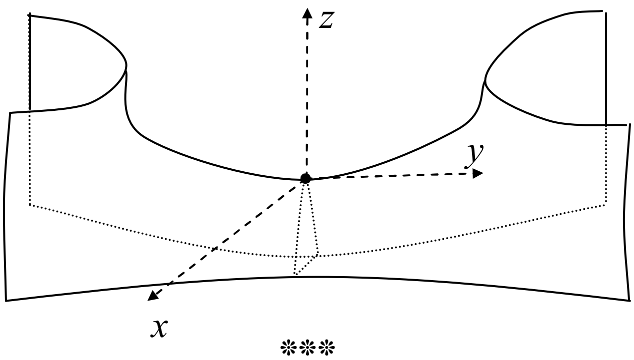
مثال ۱ : نمودار تابع $z=-x-y$ یک سطح می باشد.



مثال ۲ : نمودار تابع $z=x^{۲}+y^{۲}$ یک سهمی گون می باشد.



مثال۳ : نمودار تابع $z=x^{۲}-y^{۲}$ یک هذلولی گون یا رویه ی زین اسبی است.



***

حد در توابع دو متغیره

اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. حد این تابع در نقطه ی (a,b) عددی مانند L است، هرگاه وقتی که (x,y) به سمت (a,b) میل کند و مقدار تابع به L نزدیک شود. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

مثال : حد تابع $f(x,y)=x^{۲}+۵xy+۲y^{۲}$ در نقطه ی $(۱,-۲)$ را بدست آورید.

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(۱,-۲)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(۱,-۲)}(x^۲+۵xy+۲y^۲)=(۱)^۲+۵(۱)(-۲)+۲(-۲)^۲$$
$$=۱-۱۰+۸=-۱$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\quad \lim_{(x,y)\to(۱,۲)}\frac{۴x-y}{x+۳y}$$

$$۲)\quad \lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x+۳y-۱}{x+y+۵}$$

$$۳)\quad \lim_{(x,y)\to(۳,-۴)}\sqrt{x^۲+y^۲}$$

تذکر : اگر در محاسبه ی حد ، پس از جایگذاری مقادیر به حالت $\frac{۰}{۰}$ برسیم، در اصطلاح گویند، حد مبهم است و برای رفع ابهام لازم است قبل از جایگذاری صورت و مخرج کسر را تجزیه و ساده کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)}\frac{x^۲-y^۲}{x-y}$$

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)}\frac{x^۲-y^۲}{x-y}=\frac{(۳)^۲-(۳)^۲}{۳-۳}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۳)}\frac{x^۲-y^۲}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(۳,۳)}\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(۳,۳)}(x+y)=۳+۳=۶$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\quad \lim_{(x,y)\to(-۲,۱)}\frac{x^۲+۵xy+۶y^۲}{x+۲y}$$

$$۲)\quad \lim_{(x,y)\to(۱,۱)}\frac{x^۳-y^۳}{x-y}$$

$$۳)\quad \lim_{(x,y)\to(۱,۱)}\frac{x^۳-y^۳}{x^۲-y^۲}$$

پیوستگی در توابع دو متغیره

اگر دو متغیره ی $f(x,y)$ را در نقطه ی (a,b) پیوسته گویند، هرگاه :

الف : مقدار $f(a,b)$ وجود داشته باشد.

ب : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

ج : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ باشد.

در صورتی که حداقل یکی از شرایط فوق برقرار نباشد، گویند تابع در نقطه ی پیوسته (a,b) نیست.

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $(۰,۱)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} x+۲y+۱ & (x,y)\neq(۰,۱) \\ ۳ & (x,y)=(۰,۱) \end{cases}$$

حل :

$$f(۰,۱)=۳$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(۰,۱)}(x+۲y+۱)=۰+۲(۱)+۱=۳$$

لذا تابع داده شده در نقطه ی $(۰,۱)$ پیوسته است.

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $(۱,۲)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^۲+y^۲ & (x,y)\neq(۱,۲) \\ ۲xy & (x,y)=(۱,۲) \end{cases}$$

حل :

$$f(۱,۲)=۲(۱)(۲)=۴$$

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(۱,۲)}(x^۲+y^۲)=(۱)^۲+(۲)^۲=۱+۴=۵$$

لذا تابع داده شده در نقطه ی $(۱,۲)$ پیوسته نیست.

تمرین برای حل :

۱ : پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی $(۱,۲)$ را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۵xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۱,۲) \\ xy & (x,y)=(۱,۲) \end{cases}$$

۲ : پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی $(-۱,۱)$ را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} ۱+x^{۲}+y^{۲} & (x,y)\neq(-۱,۱) \\ x^{۲}-y^{۲} & (x,y)=(-۱,۱) \end{cases}$$

***

مشتقات جزیی توابع دو متغیره

در مورد توابع دو متغیره ، با در ثابت در نظر گرفتن یکی از متغیر ها نسبت به متغیر دیگر مانند توابع یک متغیره می توان مشتق گیری نمود. به عبارتی دیگر در مشتق گیری از تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر x ، متغیر y را ثابت در نظر می گیریم. همچنین در مشتق گیری از تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر y ، متغیر x را ثابت در نظر می گیریم. به همین دلیل است که تابع بدست آمده را مشتق جزئی مرتبه ی اول (مشتق نسبی مرتبه ی اول) می نامند.

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. در این صورت مشتق این تابع نسبت به x را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f_x و مشتق این تابع نسبت به y را با نماد $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا f_y نمایش می دهند. لذا

$\frac{\partial f}{\partial x}=$ مشتق نسبت به x (y عدد فرض می شود.)

$\frac{\partial f}{\partial y}=$ مشتق نسبت به y (x عدد فرض می شود.)

مثال۱ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x,y)=۳x+۲y+۴xy+e^{x}-e^{y}+۱$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳+۴y+e^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۲+۴x-e^{y}$$

مثال۲ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x,y)=۵x^{۲}y^{۳}-\sin x+\cos y$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۱۰xy^{۳}-\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۱۵x^۲y^۲-\sin y$$

تمرین : مشتقات جزئی تابع $f(x,y)=x^۳-۴xy$ را در نقطه ی (۱,۲) بدست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳x^۲-۴y\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۲)=۳(۱)^۲-۴(۲)=۳-۸=-۵$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-۴x\rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۲)=-۴(۱)=-۴$$

تذکر : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع سه متغیره نیز به همنی ترتیب تعریف می شود.

مثال : مشتقات جزئی مرتبه ی اول تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+۲x-۳y+z+۲$$

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۲$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۱}{۲\sqrt{y}}-۳$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{۱}{۲\sqrt{z}}+۱$$

تمرین برای حل :

۱ : مشتقات جزئی مرتبه ی اول هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x,y)=xe^{y}+xy^۲$

۲) $f(x,y)=۳+x^۲y^۲+e^{xy}$

۳) $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(xy)$

۴) $f(x,y,z)=x\sin y+y\sin x+L_n z$

۲ : مشتقات جزیی تابع $f(x,y)=L_n(x^۲+۴y)$ را در نقطه ی (۳,۲) بدست آورید.

۳ : مشتقات جزیی تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲+xyz$ را در نقطه ی (۱,۲,۳) بدست آورید.

یک مسئله ی کاربردی : اگر تابع هزینه‌ی مشترک برای مقادیر x و y از دو کالا به صورت $c(x,y)=۵+۳x^{۲}-xy+۴y^{۲}$ تعریف شده باشد. هزینه نهایی دو کالا را طوری بدست آورید که $x=۴$ و $y=۵$ باشد.

هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای x $=\frac{\partial c}{\partial x}$

هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای y $=\frac{\partial c}{\partial y}$

هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای x $\frac{\partial c}{\partial y}(۴,۵)=(۶x-y)\Big|_{(۴,۵)}=۶(۴)-(۵)=۲۴-۵=۱۹$

هزینه‌ی نهایی نسبت به کالای y $\frac{\partial c}{\partial y}(۴,۵)=(-x+۸y)\Big|_{(۴,۵)}=-۴+۸$

تمرین برای حل : اگر تابع هزینه‌ی مشترک برای مقادیر x و y از دو کالا به صورت زیر تعریف شده باشد. هزینه نهایی دو کالا را طوری بدست آورید.

$$c(x,y)=۲xe^{۳y}$$

یک مسئله ی کاربردی : اگر تابع تولید محصولی به صورت $z(x,y)=۸xy-۲x^{۲}+۴y^{۲}$ تعریف شده باشد. بهره وری نهایی x و y بدست آورید.

تولید نهایی نسبت به x (بهره وری نهایی نسبت به x) $=\frac{\partial z}{\partial x}$

تولید نهایی نسبت به y (بهره وری نهایی نسبت به y) $=\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۸y-۴x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=۸x-۸y$$

تمرین برای حل : بهره وری نهایی تابع $z(x,y)=۳xy-x^{۲}-۳y^{۲}$ را در نقطه‌ی $(۱,۲)$را بدست آورید.

***

مشتقات جزئی مراتب بالاتر :

می توان عمل مشتق گیری را روی مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول نیز انجام داد. در این صورت مشتقات جزئی مرتبه ی دوم بدست می آیند. با ادامه ی روند مشتقگیری می توان مشتقات جزئی مراتب بالاتر را نیز می توان به دست آورد. توجه داشته باشید که :

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ ابتدا از تابع f نسبت به y و سپس از تابع بدست آمده نسبت به x مشتق می گیریم.

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ ابتدا از تابع f نسبت به x و سپس از تابع بدست آمده مجدداً نسبت به x مشتق می گیریم.

منظور از نماد $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ یعنی $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ ابتدا از تابع f نسبت به y و سپس از تابع بدست آمده مجدداً نسبت به y مشتق می گیریم.

مثال : اگر $f(x,y) = ۶x^۲ y - ۴xy + ۴y^۲$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{\partial f}{\partial x} = ۱۲xy - ۴y$

ب) $\frac{\partial f}{\partial y} = ۶x^۲ - ۴x + ۸y$

ج) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = ۱۲x - ۴$

د) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = ۱۲x - ۴$

هـ) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = ۱۲y$

و) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۸$

تمرین برای حل

۱ : اگر $f(x,y)=x^{۲}-۲xy+۳y^{۲}$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}=$

ب) $\frac{\partial f}{\partial y}=$

ج) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x\partial y}=$

د) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y\partial x}=$

هـ) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=$

و) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=$

۲ : اگر $f(x,y)=x^{۳}y^{۳}+\sin x$ مقدار $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y\partial x}$ را در نقطه ی $(-۱,۲)$ بدست آورید.

۳ : اگر $f(x,y)=x^{۳}y^{۳}z^{۲}$ مقدار $\frac{\partial^{۳} f}{\partial z\partial y\partial x}$ را بدست آورید.

***

دیفرانسیل کامل توابع دو متغیره

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. در این صورت دیفرانسیل کامل این تابع را به صورت زیر تعریف می شود.

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

مثال۱ : دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y)=xe^{y}+ye^{x}$ را بدست آورید.

حل :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$df=(e^{y}+ye^{x})dx+(xe^{y}+e^{x})dy$$

مثال۲ : دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y)=۴x^{۲}-۳xy^{۲}$ را در نقطه ی $(۲,-۱)$ بدست آورید.

حل :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$df = (۸x - ۳y^۲)dx + (-۶xy)dy$

$df\Big|_{(۲,-۱)} = (۸(۲) - ۳(-۱)^۲)dx + (-۶(۲)(-۱))dy$

$= (۱۶ - ۳)dx + (۱۲)dy = ۱۳dx + ۱۲dy$

تذکر : به طور مشابه برای تابع سه متغیره ی $w = f(x, y, z)$ می توان دیفرانسیل کامل را به صورت زیر تعریف نمود.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال : دیفرانسیل کامل تابع $f(x, y, z) = xyz + x^۲ + y^۲ + z^۲$ را بدست آورید.

حل :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$df = (yz + ۲z)dx + (xz + ۲y)dy + (xy + ۲z)dz$

تمرین برای حل : دیفرانسیل کامل هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x, y) = ۴x^۲ + ۳xy^۲$

۲) $f(x, y) = xe^y + ye^x$

۳) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

***

مشتق کامل توابع دو متغیره (مشتق زنجیری)

در تابع دو متغیره ی $z = f(x, y)$ ، اگر z تابعی مشتق پذیر از دو متغیر x و y بوده و توابع $x = g(t)$ و $y = h(t)$ نیز توابعی مشتق پذیر بر حسب متغیر t باشند. در این صورت z نیز تابعی مشتق پذیر از t بوده و مشتق زنجیره ای آن نسبت به t عبارت است از :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

مثال : اگر $z = x^۲ + y^۲$ و $x = -t + e^t$ و $y = t + e^t$ باشد. مشتق کامل $\frac{dz}{dt}$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=(۲x)\times(-۱+e^t)+(۲y)\times(۱+e^t)=۲(-t+e^t)(-۱+e^t)+۲(t+e^t)(t+e^t)$$

مثال : اگر $z=x^۲+۲xy+y^۲$ و $x=\sin t$ و $y=\cos t$ باشد. مشتق کامل $\frac{dz}{dt}$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=(۲x+۲y)\times(\cos t)+(۲x+۲y)\times(-\sin t)$$

$$=۲(\sin t+\cos t)(\cos t)+۲(\sin t+\cos t)(-\sin t)$$

$$=۲\sin t\cos t+۲\cos^۲ t-۲\sin^۲ t-۲\sin t\cos t=۲\cos^۲ t-۲\sin^۲ t$$

تذکر : بطور مشابه مشتق کل (مشتق زنجیری) برای تابع سه متغیره ی $w=f(x,y,z)$ وقتی که متغیرهای x و y و z برحسب t باشند، تعریف می شود.

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\times\frac{dz}{dt}$$

مثال : با توجه به توابع زیر $\frac{dw}{dt}$ محاسبه کنید.

$$w=e^{xyz} \quad \text{و} \quad x=t^۲ \quad \text{و} \quad y=t^۳ \quad \text{و} \quad z=۲t$$

حل :

$$\frac{dw}{dt}=(yze^{xyz})(۲t)+(xze^{xyz})(۳t^۲)+(xye^{xyz})(۲)$$

$$\frac{dw}{dt}=(۲yzt+۳xzt^۲+۲xy)e^{xyz}$$

$$=(۲t^۶+۶t^۵+۲t^۵)e^{۲t^۵}=(۲t^۶+۸t^۵)e^{۲t^۵}=۲t^۵(t+۴)e^{۲t^۵}$$

تمرین برای حل : با توجه به توابع زیر $\frac{dw}{dt}$ محاسبه کنید.

$$w=\sqrt{xyz} \quad \text{و} \quad x=۴t \quad \text{و} \quad y=۳t \quad \text{و} \quad z=۲t$$

***

ماگزیمم و مینیمم در توابع دو متغیره

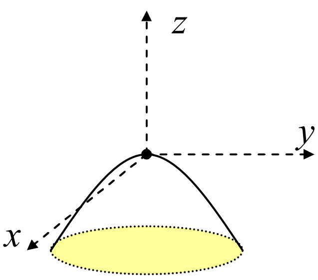
تابع $z = f(x,y)$ از دو متغیر مستقل x و y و نقطه ی (a,b) از دامنه ی تابع f را در نظر بگیرید.

در این صورت :

۱) $f(a,b)$ را ماگزیمم مطلق f گویند، هرگاه برای هر $(x,y) \in D_f$ داشته باشیم :

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

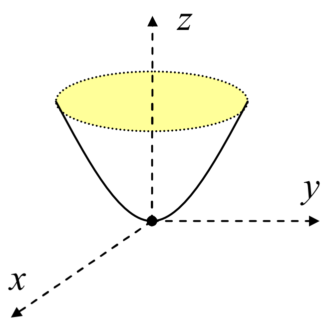
برای مثال نقطه ی (۰,۰) یک نقطه ی ماگزیمم مطلق تابع شکل زیر است.



۲) $f(a,b)$ را مینیمم مطلق f گویند، هرگاه برای هر $(x,y) \in D_f$ داشته باشیم :

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

برای مثال نقطه ی (۰,۰) یک نقطه ی مینیمم مطلق تابع شکل زیر است.



۳) $f(a,b)$ را ماگزیمم نسبی f گویند، هرگاه دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه ی f باشد که به ازای برای هر (x,y) درون این دایره داشته باشیم : $f(a,b) \geq f(x,y)$

۴) $f(a,b)$ را مینیمم نسبی f گویند، هرگاه دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه ی f باشد که به ازای برای هر (x,y) درون این دایره داشته باشیم : $f(a,b) \leq f(x,y)$

***

نکته ی ۱ : اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه ی (a,b) دارای ماگزیمم یا مینیمم نسبی باشد، آنگاه:

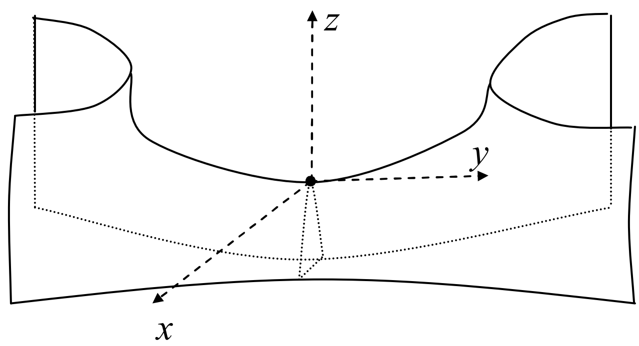
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

تعریف : نقطه ی (a,b) از دامنه ی تابع $z=f(x,y)$ را **نقطه ی بحرانی** تابع می نامند، هرگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

نکته ی ۲ : اگر تابع $z=f(x,y)$ داشته باشیم $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ ولی تابع در نقطه ی (a,b) دارای ماگزیمم یا مینیمم نسبی نباشد، آنگاه در این نقطه دارای نقطه ی زینی (زین اسبی) است.

برای مثال تابع نمودار زیر ، نقطه ی $(0,0)$ یک نقطه ی زین اسبی تابع است.



در واقع نقطه ی زین اسبی دارای شرایط ماگزیمم و مینیمم می باشد، ولی ماگزیمم و مینیمم نیست.

***

تمرین : نقطه ی بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+y^2+2x-4y+1$ در صورت وجود را بدست آورید.

حل : کافی است که دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-4=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x=-2\\ 2y=4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$$

پس تنها جواب این دستگاه نقطه ی $(-1,2)$ است. این نقطه ، نقطه ی بحرانی تابع f است.

***

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط ماگزیمم و مینیمم تابع دو متغیره

به کمک آزمون زیر می توان نقاط بحرانی تابع دو متغیره را تعیین نمود و نوع آنها را نیز مشخص کرد. برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول را تعیین کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ۰ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ۰ \end{cases}$$

به این ترتیب مختصات نقطه‌ی بحران بدست می‌آید. اگر مختصات این نقطه (a,b)فرض شود.

۲ : مقدار دلتا را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta = \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right|_{(a,b)} \right) \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \right|_{(a,b)} \right) - \left(\left. \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} \right|_{(a,b)} \right)^۲$$

۳ : با توجه به مقدار بدست آمده برای دلتا ، نوع نقطه ی بحرانی را در تعیین می کنیم.

الف : اگر $\Delta > ۰$ و $\left. \dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right|_{(a,b)} < ۰$ ، آنگاه نقطه ی (a,b) ماگزیمم نسبی است.

ب : اگر $\Delta > ۰$ و $\left. \dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right|_{(a,b)} > ۰$ ، آنگاه نقطه ی (a,b) مینیمم نسبی است.

ج : اگر $\Delta < ۰$ باشد، آنگاه نقطه ی (a,b) زین اسبی است.

د : اگر $\Delta = ۰$ باشد، آنگاه در نوع نقطه ی بحرانی (a,b) را نمی توان مشخص کرد و روشهای دیگری را باید بکاربرد.

توجه: در بند های الف و ب می توان بجای $\left. \dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} \right|_{(a,b)}$ از $\left. \dfrac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \right|_{(a,b)}$ نیز استفاده نمود.

مثال : تابع $f(x,y)=x^{۲}+xy+y^{۲}-۳x+۲$ داده شده است.

الف) نقطه یا نقاط بحرانی تابع را در صورت وجود بدست آورید.

ب) نوع نقطه‌ی نقاط بحرانی بدست آمده را تعیین کنید.

حل :

الف)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=۲x+y-۳=۰\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial x}=x+۲y=۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۲x+y=۳\\[2ex]x+۲y=۰\end{cases}\rightarrow x=۲\ ,\ y=-۱$$

پس نقطه ی $A(۲,-۱)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

ب)

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}x}=۲ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}y}=۲$$

$$\Delta=\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}\right|_{(a,b)}\right)\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}\right|_{(a,b)}\right)-\left(\left.\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}\right|_{(a,b)}\right)^{۲}=(۲)(۲)-(۱)^{۲}=۳$$

پس چون $\Delta>۰$ و $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial^{۲}x}>۰$ پس نقطه ی $A(۲,-۱)$ یک نقطه ی مینیمم است.

تمرین : تابع $f(x,y)=۱+x^{۲}-y^{۲}$ را در نظر بگیرید.

الف) نقطه یا نقاط بحرانی تابع را در صورت وجود بدست آورید.

ب) نوع نقطه‌ی بحرانی بدست آمده را تعیین کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=۲x=۰\rightarrow x=۰\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=-۲y=۰\rightarrow y=۰\end{cases}$$

پس نقطه ی $A(۰,۰)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-۲ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-۲$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\bigg|(a,b)\right)\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\bigg|(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}\bigg|(a,b)\right)^۲$$

$$\Delta = (۲)(-۲) - (۰)^۲ = -۴$$

و چون $\Delta = -۴ < ۰$ نقطه‌ی $A(۰,۰)$ زین اسبی است.

تمرین برای حل : در هر مورد نقطه یا نقاط بحرانی تابع داده شده در صورت وجود را تعیین و سپس نوع آن را مشخص کنید.

۱) $f(x,y) = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲$

۲) $f(x,y) = ۲x^۲ - xy + ۵$

۳) $f(x,y) = x^۲ - ۶xy + ۹y^۲ + ۳x - ۱۰$

۴) $f(x,y) = ۴x + ۲y - x^۲ - y^۲$

۵) $f(x,y) = ۱ + e^{xy}$

۶) $f(x,y) = x^۳ - ۳xy + y^۳$

***

یک مسئله ی کاربردی : اگر توابع تقاضای دو کالای x و y به صورت $q = ۴۰ - ۵y$ و $p = ۳۶ - ۳x$ و تابع هزینه ی مشترک آنها ، $c = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲$ باشد. مطلوب است تعیین مقداری که سود انحصارگر را ماگزیمم کرده و سپس سود ماگزیمم را محاسبه کنید.

حل : می دانیم که سود (p) حاصل تفاضل هزینه (c) از درآمد(x) می باشد.پس $p = x - c$

اکنون مقادیر مفروضات مسئله را در رابطه ی سود جایگزین کرده و ساده می کنیم.

تابع سود $f = (px + qy) - c$

$$f(x,y) = (۳۶ - ۳x)x + (۴۰ - ۵y)y - (x^۲ + ۲xy + ۳y^۲)$$

$$f(x,y) = ۳۶x - ۳x^۲ + ۴۰y - ۵y^۲ - x^۲ - ۲xy - ۳y^۲$$

$$f(x,y) = -۴x^۲ - ۸y^۲ - ۲xy + ۳۶x + ۴۰y$$

حال نقاط بحرانی تابع و نوع آنها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -۸x - ۲y + ۳۶ = ۰ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -۱۶y - ۲x + ۴۰ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۸x - ۲y = -۳۶ \\ -۱۶y - ۲x = -۴۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۴x + y = ۱۸ \\ x + ۸y = ۲۰ \end{cases} \rightarrow x = ۴ \;,\; y = ۲$$

پس نقطه ی $A(۴,۲)$ یک نقطه ی بحرانی تابع است.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -۸ \text{ و } \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -۲ \text{ و } \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -۱۶$$

$$\Delta = \left(\left.\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\right|_{(a,b)}\right)\left(\left.\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\right|_{(a,b)}\right) - \left(\left.\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)}\right)^۲$$

$$\Delta = (-۸)(-۱۶) - (-۲)^۲ = ۱۲۸ + ۴ = ۱۲۴$$

و چون $\Delta > ۰$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} < ۰$ پس نقطه‌ی $A(۴,۲)$ نقطه ی ماگزیمم است.

برای محاسبه ی سود ماگزیمم ، مقادیر $x = ۴$ و $y = ۲$ در تابع سود قرار می دهیم.

تابع سود $f(x,y) = -۴x^۲ - ۸y^۲ - ۲xy + ۳۶x + ۴۰y$

$$f(۴,۲) = -۴(۴)^۲ - ۸(۲)^۲ - ۲(۴)(۲) + ۳۶(۴) + ۴۰(۲) = ۱۱۲ \rightarrow \max(f) = ۱۱۲$$

تمرین برای حل : برای توابع تقاضا و تابع هزینه ی مشترک زیر ، مقدار مـاگزیمم سـود و همچنـین سود ماگزیمم را بدست آورید.

$$\begin{cases} p = ۱۰ - x \\ q = ۲۰ - ۲y \\ c = x^۲ + ۲xy + y^۲ \end{cases}$$

***