فصل اوّل

تابع و انواع آن

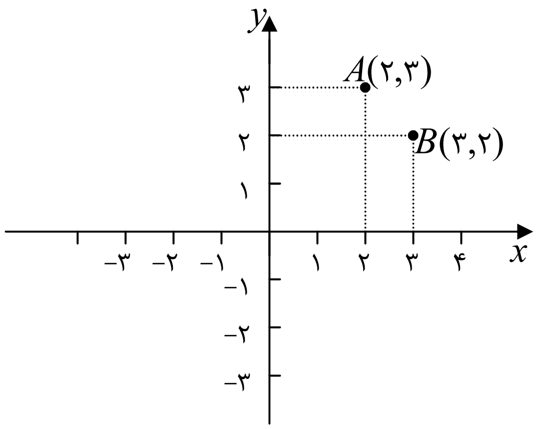
یکی از روش های بررسی رابطه ی بین دو متغیر که معمولاً یکی مستقل و دیگری وابسته آن است، آشنایی با مفهوم دقیق تابع است. در این فصل مفهوم تابع و انواع و ویژگی های آن را به شکل ساده بیان می شود.

زوج مرتب

هر دوتایی به شکل (a,b) را یک زوج مرتب می نامند. هر زوج مرتب از دو قسمت تشکیل شده است، a را مؤلفه ی اوّل یا مختص اوّل (طول) و b را مؤلفه ی دوّم یا مختص دوّم (عرض) می نامند.

برای مثال در زوج مرتب $(۱,۳)$ مؤلفه ی اوّل ۱ و مؤلفه ی دوّم ۳ است.

دلیل اینکه (a,b) را زوج مرتب می نامند این است که با جابجایی مؤلفه ها ، زوج مرتب دیگری بدست می آید و لذا مکان مؤلفه ها در هر زوج مرتب مهم است.



مثال : مختصات نقطه ای به صورت $(۲,۳)$ می باشد. مختصات این نقطه یک زوج مرتب است و با جابجا کردن مولفه های زوج $(۳,۲)$ بدست می آید که نقطه ی دیگری در صفحه ی مختصات است.

توجه : دو زوج مرتب مساویند ، هرگاه مؤلفه های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.

$$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

تمرین ۱) دو زوج مرتب $(۲m-۳,۴)$ و $(۵,۳n+۱۰)$ مساویند. مقدار n و m را به دست آورید.

حل : چون دو زوج مرتب داده شده مساویند، لذا مؤلفه های آنها نظیر به نظیر مساوی می باشند. پس می توان نوشت:

$$۲m - ۳ = ۵ \rightarrow ۲m = ۸ \rightarrow m = ۴$$

$$۳n + ۱۰ = ۴ \rightarrow ۳n = -۶ \rightarrow n = -۲$$

تمرین۲) دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار n و m را بیابید.

$$(۲m + ۳n , ۳m - ۲n) \quad \text{و} \quad (۸, -۱)$$

حل:

$$\begin{cases} ۲m + ۳n = ۸ \\ ۳m - ۲n = -۱ \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ۲\times \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۲m + ۳n = ۸ \\ ۳m - ۲n = -۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۴m + ۶n = ۱۶ \\ ۹m - ۶n = -۳ \end{cases}$$

$$+)\overline{\qquad ۱۳m = ۱۳ \rightarrow m = ۱ \qquad}$$

$$۲m + ۳n = ۸ \xrightarrow{m=۱} ۲(۱) + ۳n = ۸ \rightarrow n = ۲$$

تمرین برای حل :

تمرین۳) دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار b و a را بیابید.

$$(۲a - b , ۵) \quad \text{و} \quad (۳, a + ۳b)$$

***

تابع

تابع ، مجموعه ی زوج های مرتبی است که هیچ دو زوج متمایز آن مؤلفه ی اوّل یکسان نداشته باشند.

به عنوان مثال، مجموعه ی $f = \{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$ تابع است،

ولی مجموعه ی $g = \{(۲,۴),(۱,۳),(۴,۸),(۱,-۱)\}$ تابع نیست، زیرا دو زوج متمایز $(۱,۳)$ و $(۱,-۱)$ در آن مؤلفه ی اوّل یکسان دارند.

تمرین برای حل:

تمرین ۴) کدام یک از مجموعه های زیر تابع است و کدام یک تابع نیست. چرا؟

الف) $f_۱ = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$

ب) $f_۲ = \{(۱,۳),(۲,۵),(۱,۲)\}$

ج) $f_۳ = \{(۲,۵),(۵,۲),(۳,۲),(۲,۳),(۰,۰)\}$

د) $f_۴ = \{(۲,۵),(۵,۴),(۳,۲),(۲,۵),(۰,۰)\}$

هـ) $f_۵ = \{(۲,۵),(۳,۷),(۳,۸),(۲,۵),(۰,۰)\}$

نتیجه: اگر (a,b) و (a,c) دو زوج از یک تابع باشند، در این صورت لازم است که $b=c$ باشد.

***

تمرین ۵) مجموعه ی $f=\{(۱,۲),(۳,۰),(۷,-۱),(۳,۵p+۲)\}$، یک تابع است. مقدار p را بیابید.

حل: این مجموعه وقتی می تواند تابع باشد که دو زوج $(۳,۵p+۲)$ و $(۳,۰)$ مساوی باشند. یعنی

$$۵p+۲=۰ \to ۵p=-۲ \to p=\frac{-۲}{۵}$$

تمرین ۶) مجموعه ی $f=\{(۲,۳),(۰,۵),(۴,۱),(۰,m^۲+۴m)\}$، یک تابع است. مقدار m را بیابید.

حل: این مجموعه وقتی می تواند تابع باشد که دو زوج $(۰,m^۲+۴m)$ و $(۰,۵)$ مساوی باشند. یعنی

$$m^۲+۴m=۵$$

$$m^۲+۴m-۵=۰ \to (m+۵)(m-۱)=۰ \to \begin{cases} m+۵=۰ \to m=-۵ \\ m-۱=۰ \to m=۱ \end{cases}$$

***

تمرین برای حل :

تمرین۷) اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار k را بیابید.

$$f=\{(۱,۳),(۲,۰),(۴,۷),(۱,k^۲-۲k)\}$$

تمرین۸) مجموعه ی زیر یک تابع است. مقدار b و a را به دست آورید.

$$f=\{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۳),(۳,۵),(۰,-۱),(۵,۳)\}$$

تمرین ۹) اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار k را بیابید.

$$f=\{(۴,۹),(۳,۵),(t,-۱),(۳,t^۲-t-۷)\}$$

تمرین۱۰) اگر $f=\{(۳,۵),(۴,-۴),(۷,۲),(۱,۰)\}$ و $g=\{(۴,۴),(۳,۵),(۷,۲)\}$ دو تابع باشند، تحقیق کنید که آیا $f\cup g$ و $f\cap g$ و $f-g$ تابع هستند یا خیر؟

نتیجه:

۱: زیر مجموعه ی هر تابع همیشه یک تابع است.(حتی اگر تهی باشد.)

۲ : اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد ولی اشتراک و تفاضل دو تابع همیشه یک تابع است.

***

دامنه و برد تابع

مجموعه ی مؤلفه های اول زوج های مرتب یک تابع را دامنه (حوزه ی تعریف یا قلمرو) و مجموعه ی مؤلفه های دوم آنرا برد (حوزه ی مقادیر) می نامند. مثلاً در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$

دامنه $D_f=\{۱,۲,۳,۰\}$

برد $R_f=\{۲,۰,-۱\}$

تمرین برای حل:

تمرین ۱۱) دامنه و برد تابع $f=\{(-۲,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۰,۲),(۵,۲)\}$ را بنویسید.

***

روش های نمایش تابع

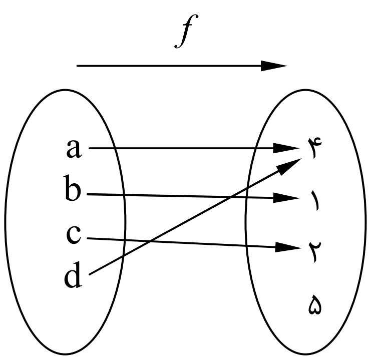
یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی A را دامنه و مجموعه‌ی B را هم دامنه یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f : A \to B$$

جهت آشنایی عمیق تر با مفهوم تابع ، روش های نمایش آن را بیان می کنیم.

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه بین مجموعه ی A به مجموعه ی B، که با روش پیکانی یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. مانند تابع زیر



دامنه (A)　　هم دامنه (B)

تذکر: در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود. یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را برد تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$

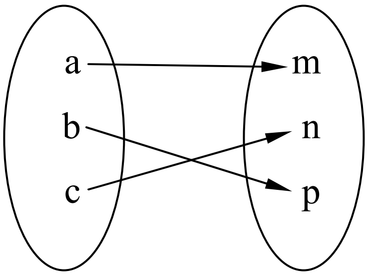
هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$

برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

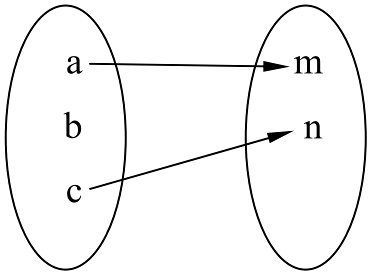
نتیجه‌ی۱ : مجموعه ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضوهایی از مجموعه ی B(هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

نتیجه‌ی ۲ : در حالت کلی برد تابع همواره زیر مجموعه ی هم دامنه ی آن است.[1] یعنی $R_f \subseteq B$

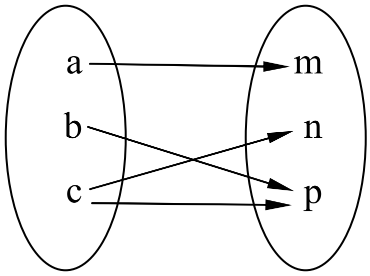
تمرین۱۲) کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



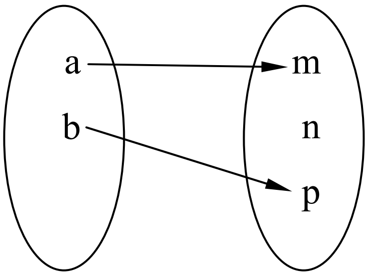
(۱)



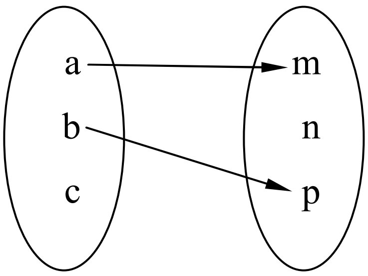
(۲)



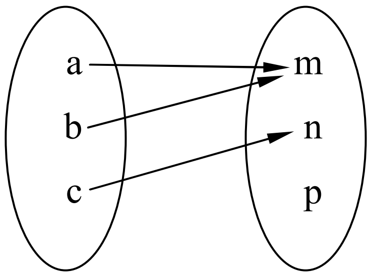
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

حل :

۱) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۲) طبق تعریف چون از b پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۳) طبق تعریف چون از c دو پیکان خارج شده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۴) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۵) طبق تعریف چون از c پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

[1] . در حالتی که $R_f = B$ باشد. گویند تابع پوشا است.

۶) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه ای از زوج های مرتب را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اول آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اول، اعضای دامنه و مولفه های دوم ، اعضای برد خواهند بود.

به عنوان مثال،تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f = \{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f = \{(x,y) \mid x \in D_f , y \in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت زوج مرتب ، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اوّل برابر باشند، باید مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند[2].

تمرین برای حل :

تمرین ۱۳) مجموعه ی زیر یک تابع است. مقدار b و a را به دست آورید.

$$f = \{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۳),(۳,۵),(۰,-۱),(۵,۳)\}$$

***

۳ : نمایش تابع به صورت جدول

نمایش تابع به صورت جدول، مشابه نمایش زوج مرتبی تابع است. در این نمایش مقادیر x ها (دامنه) و مقادیر y ها (برد) تابع را نمایش می دهند.

$f:$

x	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	......	x_n
y	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	....	y_n

[2]. اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

به عنوان مثال، نمایش تابع مورد (۱) به صورت جدول، به شکل زیر است.

$f:$

x	a	b	c	d
y	۴	۱	۲	۴

تمرین برای حل :

تمرین ۱۴) تابعی بنویسید که دامنه ی آن دو عضو و برد آن یک عضو داشته باشد.

تمرین ۱۵) در هر مورد تابعی مثال بزنید که

الف : دامنه ی آن شامل دو عضو باشد.

ب : برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج : دامنه ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

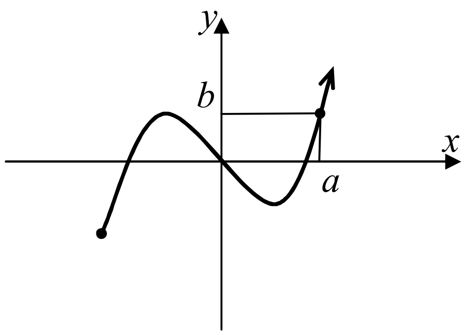
د : دامنه ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ : دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

تمرین۱۶) دو تابع بنویسید که دامنه و برد آنها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آنها یکسان نباشند.

***

۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)



اگر مجموعه ی f، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b)\in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

تمرین برای حل :

تمرین ۱۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۴,۰),(-۱,۱)\}$$

تمرین ۱۸) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\mid y=x^{2},-1\le x<1\}$$

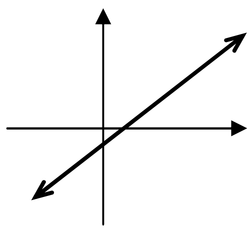
تمرین ۱۹) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x},0\le x\le 4\}$$

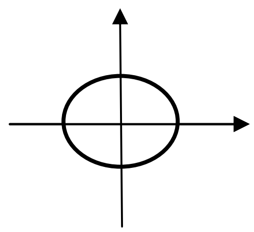
از دیدگاه هندسی،یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط قائم)

تمرین برای حل :

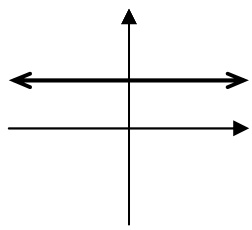
تمرین۲۰) کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



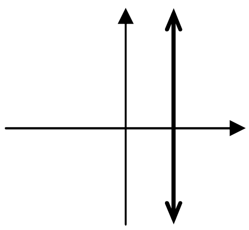
(۱)



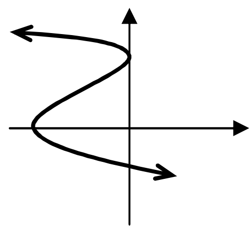
(۲)



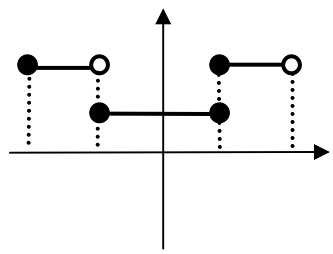
(۳)



(۴)



(۵)

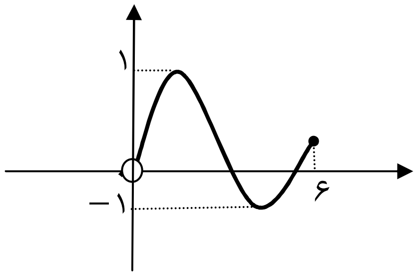


(۶)

تذکر: اگر تابعی به صورت هندسی نمایش داده شده باشد، تصویر نمودار تابع روی محور x ها دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر :

$$D_f=\{x\in R\mid (x,y)\in f\}$$
$$R_f=\{y\in R\mid (x,y)\in f\}$$

تمرین۲۱) دامنه و برد تابع با نمودار زیر را مشخص کنید.



حل : تصویر نمودار تابع را روی محور طولها را دامنه و تصویر نمودار تابه روی محور عرض ها را برد تابع می نامند. پس:

دامنه $D_f = (۰,۶]$

برد $R_f = [-۱,۱]$

تمرین برای حل :

تمرین۲۲) نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۳x - ۱$ ب) $f(x) = x^۲$ ج) $f(x) = \sqrt{x}$

تمرین ۲۳) نمودار تابع $y = x^۲ - ۱$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

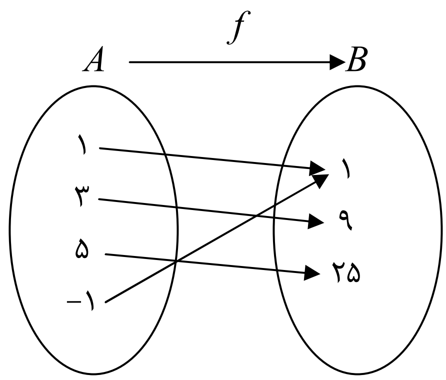
***

۵ : نمایش تابع از طریق ضابطه (نمایش جبری)

برای تابع f که از مجموعه ی A به مجموعه ی B تعریف شده است. رابطه ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. ضابطه یا قانون یا معادله ی تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f : A \to B$$
$$y = f(x)$$

مثال : تابع نمودار مقابل دارای معادله ای به صورت زیر است.



$$f(x) = x^{۲}$$

مثال : در تابع $f = \{(۲,۵),(۳,۷),(۰,۱),(-۱,۱)\}$ با کمی دقت معلوم می شود که مؤلفه ی دوّم (y) هر زوج از دو برابر مؤلفه ی اوّل (x) یک واحد بیشتر است. پس می توان نوشت:

$$y = ۲x + ۱$$

در نمایش ضابطه ای به جای y می توان از نماد $f(x)$ نیز استفاده کرد. پس :

$$f(x) = ۲x + ۱$$

***

تمرین۲۴) معادله ی تابعی را بنویسید که اندازه ی ضلع مربع را می گیرد و مساحت آن را می دهد.

حل : اگر x اندازه ی ضلع مربع باشد. در این صورت :

$s(x) = x^{۲}$

تمرین۲۵) مجموع دو عدد ۱۰ است. اگر یکی از آنها x باشد. معادله ی تابعی را بنویسید که حاصل ضرب آنها را به x وابسته کند.

حل :

x عدد اولی

$۱۰ - x$ عدد دومی

$p = x(۱۰ - x) = ۱۰x - x^{۲}$ تابع حاصل ضرب

تمرین برای حل :

تمرین۲۶) معادله ی تابعی را بنویسید که اندازه ی ضلع مربع را می گیرد و محیط آن را می دهد.

تمرین۲۷) معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت دایره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین۲۸) معادله ی تابعی را بنویسید که حجم کره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین۲۹) عرض مستطیلی x و طول آن $x+۳$ می باشد. تابع مساحت و تابع محیط مستطیل را بنویسید.

گاهی معادله ی تابع را به شکل دو یا چند ضابطه ای نمایش می دهند. در این حالت برای هر یک از ضابطه ها شرایطی را تعیین می کنند و ورودی های هر ضابطه جهت محاسبه را به توجه به این شرایط در نظر مـی گیرند. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال: تابع زیر یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۲ \\ ۴x-۷ & x<۲ \end{cases}$$

این تابع برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است. با توجه به ضابطه ها معلوم می شود که ایـن تـابع اعـداد بزرگتر یا مساوی ۲ را به توان دو رسانده و با سپس با یک جمع می کند و رفتار این تابع با اعـداد کمتـر از ۲ این است که ابتدا عدد را چهار برابر نموده و از حاصل ۷ واحد کم می کند.

مثال : تابع زیر یک تابع سه ضابطه ای می باشد.

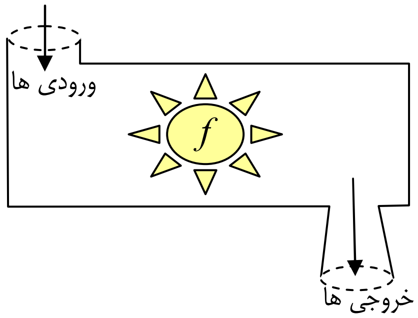
$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x>۱ \\ ۵ & -۱\leq x<۱ \\ -x+۴ & x<-۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه ها معلوم است که عدد ۱ عضو دامنه ی این تابع نیست.

***

۶ : نمایش تابع به صورت یک ماشین

یک ماشین به صورت مقابل را در نظر می گیریم. در این ماشین ورودی x تحت اثر عملیات f قرار می گیرد و خروجی y حاصل می شود. این ماشین متناظر با عملکرد ضابطه ی $y = f(x)$ خواهد بود و اصطلاحاً تابعی از x به y گفته می شود.

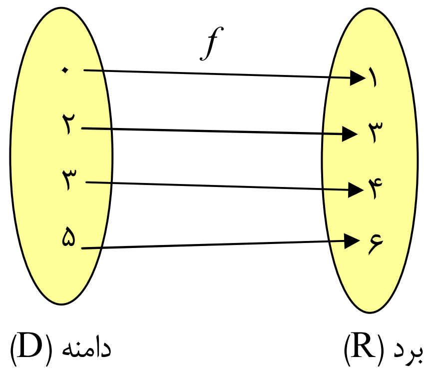


لذا طبق تعریف تابع می توان گفت که این ماشین یک عضو از دامنه را می گیرد و یک عضو منحصر بفرد از برد می دهد.

مثلاً در تابع $f = \{(۲,۳),(۳,۴),(۰,۱),(۵,۶)\}$ مؤلفه ی دوّم هر زوج یک واحد از مؤلفه ی اوّل آن بیشتر است. پس می توان نوشت:

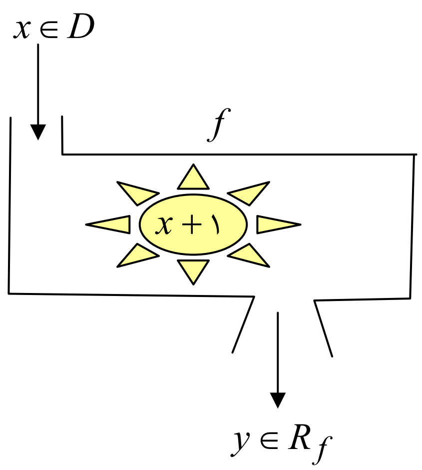
$$f = \{(x,y) \mid y = x + ۱\}$$

که در آن $x \in D_f = \{۰,۲,۳,۵\}$ می باشد.



برای مثال با توجه به تابع قبل داریم.

$$f : D \to R$$
$$y = f(x) = x + ۱$$



در این حالت نیز مجموعه ی ورودی ها، **دامنه** و مجموعه ی خروجی ها، **برد** تابع می باشند.

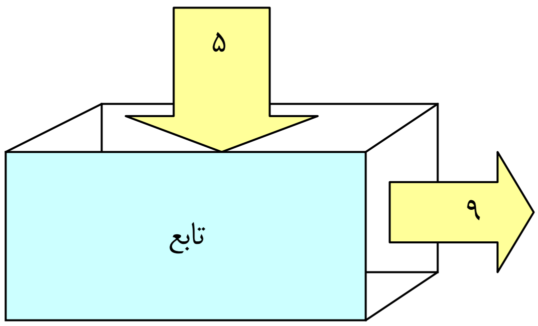
مثالی جهت مرور کلی نمایش روش های نمایش تابع

همانطور که بیان شد. هر رابطه که هر عضو مجموعه ی A را دقیقاً به یک عضو از مجموعه ی B نسبت دهد را یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B می نامند.

مثال : دستگاه زیر هر عضو مجموعه ی $A=\{۳,۵,۶,۷,۱\}$ را ابتدا دو برابر و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می کند.

مجموعه ی خروجی های این دستگاه عبارت است :

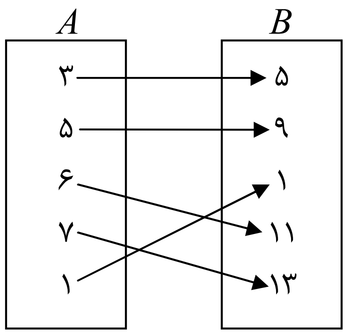
$$B=\{۵,۹,۱۱,۱۳,۱\}$$



چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک عضو از مجموعه ی B نسبت می دهد. پس این رابطه یک تابع است.

این تابع را به شکل های مختلفی نمایش می دهند.

الف : نمایش تابع به شکل پیکانی



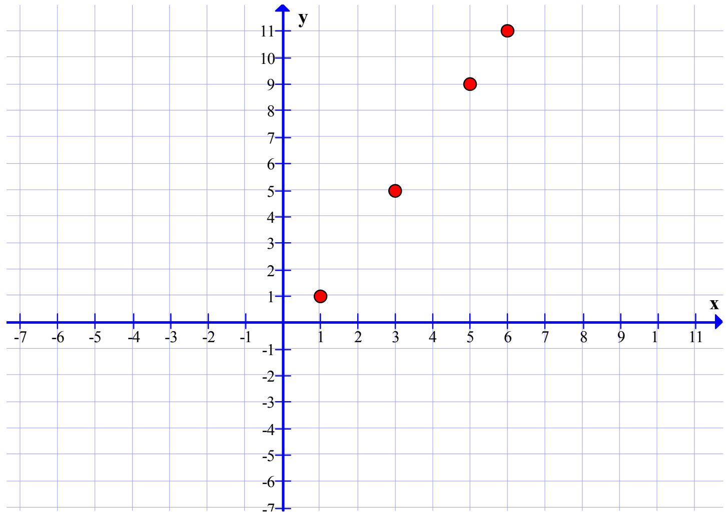
ب : نمایش تابع به شکل زوج های مرتب

$$\{(۳,۵),(۵,۹),(۶,۱۱),(۷,۱۳),(۱,۱)\}$$

ج : نمایش تابع به شکل جدول

x	۳	۵	۶	۷	۱
y	۵	۹	۱۱	۱۳	۱

د : نمایش تابع به شکل مختصات دکارتی



هـ : نمایش تابع به شکل ضابطه : چون مقدار y برابر $۲x-۱$ پس $y=۲x-۱$

تمرین۳۰) دامنه و برد تابع فوق را بنویسید.

***

مقدار تابع در یک نقطه

تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f=\{(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱),(-۲,۵)\}$$

می گویند مقدار تابع در نقطه ی $x=۲$ برابر ۵ است و می نویسند: $f(۲)=۵$

همچنین مقدار تابع در نقطه ی $x=۰$ برابر ۳ است، لذا $f(۰)=۳$

به طور کلی اگر (a,b) یک زوج مرتب از تابعی باشد. در این صورت مقدار تابع در نقطه ی $x=a$ برابر b است و می نویسند. $b=f(a)$

اگر معادله ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه ی $x=a$ از دامنه ی آن، کافی است مقدار a را در معادله ی تابع به جای x جایگزین کنیم.

مثال: اگر $f(x)=۳x-x^۲+۴$ مقدار تابع را در نقطه ی $x=-۱$ بدست آورید.

حل :

$$f(-۱)=۳(-۱)-(-۱)^۲+۴=-۳-۱+۴=۰$$

تمرین برای حل :

تمرین ۳۱) مقدار تابع $f=\{(۱,۷),(۰,۴),(۲,-۹),(۳,۷)\}$ را در نقطه ی $x=۲$ بدست آورید.

تمرین ۳۲) مقدار تابع $f(x)=۱۰x-x^۲$ را در نقطه ی $x=۳$ بدست آورید.

تمرین۳۳) اگر $f(x)=x^۲+۳x$ مقدار تابع را در نقاط داده شده را به دست آورید.

۱) $f(-۱)=$	۳) $f(۲)=$	۵) $f(-۲)=$
۲) $f(۱)=$	۴) $f(۰)=$	۶) $f(۳)=$

تمرین ۳۴) اگر $f(x)=x^۲+۳x$ یک تابع باشد، تساوی های زیر را بدست آورید.

الف) $f(-۳)$	ج) $f(۵k)$	هـ) $f(۱-x)$
ب) $f(k)$	د) $f(۲x)$	و) $f(f(x))$

تمرین۳۵) اگر $f(x)=-x^۲+۳x$ و $g(x)=۳x^۲-۳x+۱$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $f(-۱)=$	۳) $۴f(۳)=$	۵) $۲f(۰)-g(۱)=$
۲) $g(۲)=$	۴) $f(-۱)+g(۴)=$	۶) $\dfrac{f(۴)+g(۲)}{g(۰)}=$

***

برای تعیین مقدار تابع وقتی یک تابع چند ضابطه ای داده شده باشد، به محدوده های تعیین شـده بـرای هـر ضابطه توجه شود. برای مثال در تابع دو ضابطه ای

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+۵ & x<۲ \end{cases}$$

اگر بخواهیم مقدار تابع را در نقطه ی $x=۱$ حساب کنیم. با توجه به اینکه عدد «۱» از ۲ کمتر است ، ضابطه ی پایین را بکار می بریم.

$$f(۱)=۳(۱)+۵=۸$$

به همین ترتیب برای محاسبه ی $f(۳)$ از ضابطه ی بالا استفاده می کنیم.

$$f(۳)=(۳)^۲-۱=۸$$

تمرین۳۶) با توجه به تابع مقابل تساوی های زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+۵ & x<۲ \end{cases}$$

۱) $f(۰)=$ ۳) $f(۲)=$

۲) $f(\sqrt{۵})=$ ۴) $f(-۵)=$

تمرین۳۷) تابع زیر را در نظر بگیرید سپس مقادیر داده شده را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x>۱ \\ ۵ & -۱\leq x<۱ \\ -x+۴ & x<-۱ \end{cases}$$

۱) $f(۳)=$ ۳) $f(\sqrt{۵})=$ ۵) $f(-۱)=$

۲) $f(۱)=$ ۴) $f(۰)=$ ۶) $f(-۵)=$

***

تمرین ۳۸) اگر $f(x)=۲^{x}$ نشان دهید که: $\dfrac{f(x+۳)}{f(x-۱)}=f(۴)$

تمرین ۳۹) اگر $f(x)=x^{۳}-۱$ نشان دهید که $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=a^{۲}+b^{۲}+ab$

تمرین ۴۰) در تابع زیر اگر $f(۲)=۲$ و $f(-۲)=۰$ باشد، مقادیر b و a را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-۱} & x>۱ \\ x+b & x\leq ۱ \end{cases}$$

تمرین ۴۱) در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که $f(f(۲))=۵$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۷ & x>۱ \\ ax^{۲}-۴x & x\leq ۱ \end{cases}$$

تمرین ۴۲) دامنه ی تابعی $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ می باشد. اگر این تابع دارای ضابطه ای به شکل زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\geq ۳ \\ x^{۲} & x<۳ \end{cases}$$

الف: این تابع را به صورت زوج مرتب نمایش دهید. ب : نمودار تابع را رسم کنید.

***

معرفی چند تابع خاص

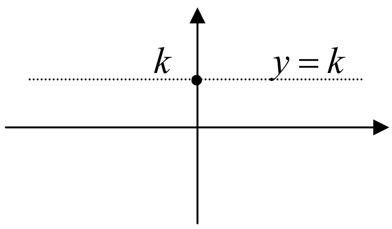
در ادامه چند تابع خاص که کاربردی های زیادی دارند، معرفی می کنیم.

۱) تابع ثابت

هر تابع با ضابطه ی $f(x)=k$ که در آن k یک عدد حقیقی باشد را تابع ثابت می نامند.

مانند تابع $f(x)=۵$

در تابع ثابت ، هر x عضو دامنه به عدد k نظیر می شود. بنابراین برد این تابع همواره مجموعه ی یک عضوی $\{k\}$ خواهد بود. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می شود که نمودار تابع ثابت بر خط موازی محور طولها و گذرا از نقطه ای k روی محور عرض ها منطبق است.



نتیجه : در حالت کلی دامنه ی تابع ثابت مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی یک عضوی $\{k\}$ است.

تمرین برای حل :

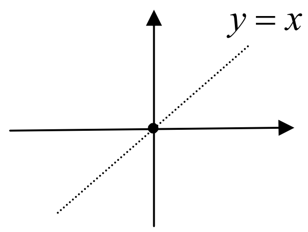
تمرین ۴۳) نمودار تابع $f(x)=-۲$ را رسم کنید.

تمرین ۴۴) اگر f یک تابع ثابت باشد، به طوری که $f(۴)+۳f(۶)-f(۸)=۱۸$. در این صورت $f(۳)$ را بیابید.

۲) تابع همانی

هر تابع با ضابطه ی $f(x)=x$ را تابع همانی می نامند.

در تابع همانی ، هر x عضو دامنه به همان x از برد نظیر می شود. بنابراین برد این تابع همواره با دامنه ی آن برابر است. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می شود که نمودار تابع ثابت بر خط موسوم به نیمساز ربع اوّل و سوّم منطبق است.



نتیجه : در حالت کلی دامنه و برد تابع همانی مجموعه ی اعداد حقیقی است.

تمرین برای حل :

تمرین ۴۵) اگر f یک تابع همانی باشد، به طوری که $f(۴)+af(۲)-f(۸)=۱۸$. در این صورت مقدار a را بیابید.

***

۳) تابع قدرمطلق

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق x را با نماد $|x|$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

برای مثال :

الف) $|-۴|=-(-۴)=۴$

ب) $|۳/۱۴|=۳/۱۴$

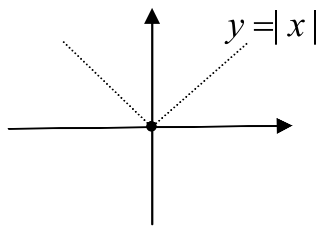
ج) $|-\sqrt{۲}|=-(-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}$

همچنین با این تعریف نتیجه می شود که قدر مطلق عدد صفر ، صفر است.

هر تابع با ضابطه ی $f(x)=|x|$ را تابع قدر مطلق می نامند. واضح است که دامنه ی تابع قدر مطلق در حالت کلی مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی غیر منفی است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = (۰,+\infty)$$

بنابراین نمودار تابع قدر مطلق به شکل زیر است.



تمرین برای حل :

تمرین ۴۶) تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}|=$ 　　　　　　 ب) $|\sqrt{۵}-\sqrt{۷}|=$

تمرین ۴۷) نمودار تابع $f(x)=|x|$ به کمک نقطه یابی رسم کنید.

***

۴) تابع جزء صحیح

اگر x یک عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

اگر x عدد صحیح باشد، جزء صحیح x برابر خود x است.

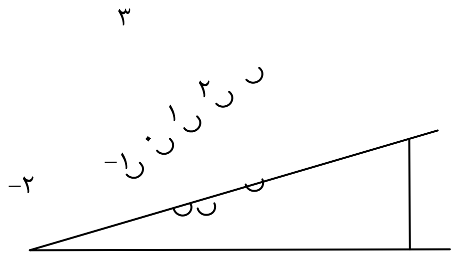
اگر x عدد صحیح نباشد، جزء صحیح x برابر بزرگترین عدد صحیح قبل از x است.

برای مثال :

الف) $[۲/۸]=۲$ 　　　　　　 ج) $[-۲/۷]=-۳$

ب) $[۳/۵]=۳$ 　　　　　　 د) $[۴]=۴$

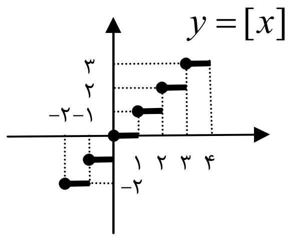
برای درک مفهوم، جزء صحیح می توان از خط کش شیب دار ، نیز استفاده نمود.



هر تابع با ضابطه ی $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح می نامند. واضح است که دامنه ی تابع جزءصحیح در حالت کلی مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد صحیح است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = Z$$

بنابراین نمودار تابع جزء صحیح به صورت پله ای، مشابه نمودار زیر می باشد.



تمرین برای حل :

تمرین ۴۸) نمودار تابع $f(x)=[x]$ را رسم کنید.

❋❋❋

۵) تابع علامت

اگر x یک عدد حقیقی باشد، علامت x را به صورت $\operatorname{sgn}(x)$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

برای مثال :

الف) $\operatorname{sgn}(-۵)=-۱$ ج) $\operatorname{sgn}(۰)=۰$

ب) $\operatorname{sgn}(\sqrt{۷}) = ۱$ 		د) $\operatorname{sgn}(-\frac{۳}{۵}) = -۱$

واضح است که دامنه‌ی تابع علامت در حالت کلی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی $\{۱, ۰, -۱\}$ است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = \{۱, ۰, -۱\}$$

تمرین برای حل :

تمرین ۴۹) تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $[-\sqrt{۲}] =$ 		ب) $[۱-\sqrt{۳}] =$ 		ج) $|۱-\sqrt{۳}| =$ 		د) $\operatorname{sgn}(۱-\sqrt{۳}) =$

تمرین ۵۰) اگر $f(x) = [x] + \operatorname{sgn}(x)$ مقدار $f(-۳/۲)$ را حساب کنید.

تمرین ۵۱) نمودار تابع $f(x) = [x]$ را رسم کنید.

***

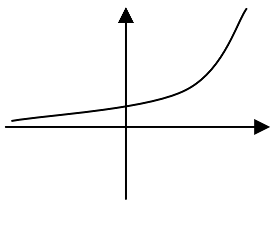
۶) تابع نمایی

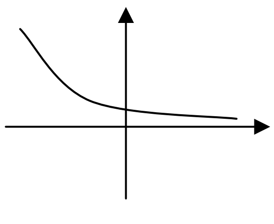
هر تابع به شکل $f(x) = a^x$ که در آن $a > ۰$ و $a \neq ۱$ را تابع نمایی می نامند.

برای مثال توابع $f(x) = ۲^x$ و $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ نمایی هستند.

نمودار هر تابع نمایی با توجه به پایه ی آن به صورت یکی از حالت های زیر است.

الف) اگر $a > ۱$ باشد. تابع همواره صعودی (افزایشی) است.چنین توابعی را توابع رشد می نامند.





ب) اگر $۰ < a < ۱$ باشد. تابع همواره نزولی (کاهشی) است.چنین توابعی را توابع زوال می نامند.

واضح است که دامنه‌ی تابع نمایی در حالت کلی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = (۰,+\infty)$$

تمرین برای حل :

تمرین ۵۲) تعیین کنید که تابع نمایی $f(x)=(\sqrt{۵})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین ۵۳) نمودار توابع زیر را به کمک نقطه یابی رسم کنید.

الف) $f(x)=۲^x$ ب) $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$

***

۷) تابع لگاریتمی

می دانیم که تساوی $a^x=b$ در حالتی که $a,b>۰$ و $a\neq ۱$ را می توان به صورت $\log_a^b=x$ نمایش داد.

$$a^x=b \leftrightarrow \log_a^b = x$$

برای مثال :

$$۲^۳=۸ \leftrightarrow \log_۲^۸ = ۳$$

هر تابع به شکل $f(x)=\log_a^x$ [3] که در آن $x,a>۰$ و $a\neq ۱$ را تابع لگاریتمی می نامند. هر تابع لگاریتمی دارای ویژگی های زیر است.

۱) $\log_a^a = ۱$

۲) $\log_a^۱ = ۰$

۴) $\log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$

۵) $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$

[3] . خوانده می شود لگاریتم x در مبنای a

$۳)\ \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy}$ $\qquad$ $۶)\ \log_{a^m}^x = \frac{۱}{m}\log_a^x$

مثال : تساوی زیر را کامل کنید.

$$\log_۶^۴ + \log_۶^۹ =$$

حل :

$$\log_۶^۴ + \log_۶^۹ = \log_۶^{۴\times۹} = \log_۶^{۳۶} = \log_۶^{۶^۲} = ۲\log_۶^۶ = ۲\times۱ = ۲$$

اگر مبنای لگرایتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را لگاریتم اعشاری (دهدهی) می نامند. طبـق قـرار داد در چنـین لگاریتم هایی مبنای لگاریتم نوشته نمی شود. مثلاً :

$$\log_{۱۰}^۷ = \log^۷$$

مثال : تساوی زیر را کامل کنید.

$$\log^۴ + ۲\log^۵ =$$

حل :

$$\log^۴ + ۲\log^۵ = \log^۴ + \log^{۵^۲}$$
$$= \log^۴ + \log^{۲۵} = \log^{۴\times۲۵} = \log^{۱۰۰} = \log^{۱۰^۲} = ۲\log^{۱۰} = ۲\times۱ = ۲$$

یکی از اعداد گنگ که کاربرد های زیادی در صنعت و اقتصاد و بازرگانی دارد، عدد نپرین می باشد. این عـدد به افتخار لئونارد اویلر را با e نمایش می دهند و مقدار تقریبی آن تا دو رقم اعـشار $۲/۷۱$ مـی باشـد. اگـر مبنای لگاریتم عدد نپرین باشد، لگاریتم را لگاریتم طبیعی می نامند. طبق قرار داد لگاریتم طبیعی را به صورت L_n نمایش می دهند. مثلاً:

$$L_n ۵ = \log_e^۵$$

با توجه به ویژگی های لگاریتم می توان نتیجه گرفت که :

$$L_n e = ۱ \quad و \quad L_n ۱ = ۰$$

مثال : اگر $f(x) = L_n x$ باشد، حاصل $f(e^۵)$ را بدست آورید.

حل :

$f(e^{۵}) = L_n e^{۵} = ۵L_n e = ۵ \times ۱ = ۵$

واضح است که دامنه‌ی تابع لگاریتمی در حالت کلی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$D_f = (۰, +\infty) \quad \text{و} \quad R_f = R$$

تمرین برای حل :

تمرین ۵۴) معادله ی $\log_x^{۲x+۱۵} = ۲$ را حل کنید.

تمرین ۵۵) نمودار تابع $f(x) = \log^x$ را به کمک نقطه یابی رسم کنید.

***

روش های تعیین دامنه ی توابع

بزرگترین مجموعه ای که به ازای تمام اعضای آن یک تابع تعریف شده باشد، را دامنه ی آن تابع می نامند.

بر این اساس موارد زیر را در حالت کلی می توان برای تعیین دامنه ی توابع بیان کرد.

الف) تابع چند جمله ای

دامنه ی هر تابع چند جمله ای ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

مثال : دامنه ی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=3x^{2}+x^{5}-4x+1$$

حل : این تابع یک تابع چندجمله ای است، لذا دامنه ی آن مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$D_f=R$$

ب) تابع کسری

دامنه ی هر تابع کسری ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

لذا برای تعیین دامنه ی تابع کسری کافی است، ابتدا ریشه های مخرج را تعیین و از الگوی زیر استفاده کرد.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال : دامنه ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3-x}$$

حل : ابتدا ریشه های مخرج کسر (ها) را تعیین می کنیم.

$$x-1=0\rightarrow x=1$$
$$3-x=0\rightarrow x=3$$

$$D_f=R-\{1,3\}$$

ج) تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم)

دامنه ی هر تابع اصم ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال نامنفی باشد.

$$f(x)=\sqrt{u}\rightarrow u\geq 0$$

مثال : دامنه ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\sqrt{5x-10}$$

حل :

$$5x-10\geq 0\rightarrow 5x\geq 10\rightarrow x\geq 2$$

پس دامنه ی این تابع می شود.

$$D_f=[2,+\infty)$$

د) تابع رادیکالی با فرجه ی فرد

دامنه ی این چنین توابعی با دامنه ی عبارت زیر رادیکل برابر است.

مثال : دامنه ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{3x}{x^{2}-4}}$$

حل: کافی است که دامنه ی تابع $u=\frac{3x}{x^{2}-4}$ را تعیین کنیم. این تابع ، یک تابع کسری است، در این صورت:

$$x^{2}-4=0\rightarrow x^{2}=4\rightarrow x=\pm 2$$

$$D_f=R-\{+2,-2\}$$

توجه داشته باشید که قبل از تعیین دامنه ی یک تابع ، ساده کردن آن مجاز نمی باشد.

تمرین برای حل : دامنه ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۵۶) $f(x)=۲-x^۳+۴x$

۵۷) $f(x)=\frac{۱}{۳}x-۲x^۵+۱$

۵۸) $f(x)=\frac{۳x}{۲x-۸}$

۵۹) $f(x)=\frac{۵x-۱}{x^۲+۳x}$

۶۰) $f(x)=\frac{۴x-۱}{x^۲-۹}$

۶۱) $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۵x+۶}$

۶۲) $f(x)=\frac{x}{x^۲+۹}$

۶۳) $f(x)=\frac{۳x}{x^۳-۱۶x}$

۶۴) $f(x)=\sqrt{۸-۲x}$

۶۵) $f(x)=\frac{-۷}{\sqrt{۲x-۶}}$

۶۶) $f(x)=\frac{۵}{\sqrt{۴-x^۲}}$

۶۷) $f(x)=\sqrt{\frac{۲}{۳-x}}$

۶۸) $f(x)=\sqrt[۴]{\frac{۲}{x-۱}}$

۶۹) $f(x)=\sqrt{\frac{-۵}{x-۱}}$

۷۰) $f(x)=\sqrt[۵]{x^۲+۷x-۱}$

تمرین ۷۱) تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

تمرین ۷۲) تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن $[۵,+\infty)$ باشد.

***

تابع های مساوی

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. $(D_f=D_g)$

ب) به ازای هر x عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. $(f(x)=g(x))$

مثال۱) دو تابع زیر بنابر تعریف فوق مساوی هستند.

$$f=\{(۱,۵),(۳,-۱),(۲,۰)\} \quad \text{و} \quad g=\{(۲,۰),(۱,۵),(۳,-۱)\}$$

مثال۲) دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا دامنه ی آنها نامساویند.

$$f=\{(۱,۵),(۳,-۱),(۴,۰)\} \quad \text{و} \quad g=\{(۲,۰),(۱,۵),(۳,-۱)\}$$

$$D_f=\{۱,۳,۴\} \quad \text{و} \quad D_g=\{۱,۳,۲\} \quad \Rightarrow \quad D_f\neq D_g$$

مثال۳) دو تابع زیر مساوی نیستند، و با اینکه دامنه ی آنهای مساوی دارند ولی $f(۲)\neq g(۲)$.

$f = \{(۱,۵),(۳,-۱),(۲,۰)\}$ و $g = \{(۲,۷),(۱,۵),(۳,-۱)\}$

مثال۴) دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا دامنه ی آنها نامساویند.

$f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$

$$D_f = R \quad \text{و} \quad D_g = R - \{۲\} \quad \Rightarrow \quad D_f \neq D_g$$

مثال۵) دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^۲}$ بنابر تعریف فوق مساوی هستند. زیرا

اولاً : دامنه ی هر دو تابع مجموعه های مساوی هستند. $D_f = D_g = R$

ثانیاً : به ازای هر x عضو دامنه، مقادیر دو تابع برابر هستند. $g(x) = \sqrt{x^۲} = |x| = f(x)$

تمرین برای حل : دامنه ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۷۳) $f(x) = \log x^۲$ و $g(x) = ۲\log x$

۷۴) $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$

۷۵) $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \dfrac{x^۴ - ۱۶}{x^۲ + ۴}$

تمرین۷۶) دو تابع زیر مساویند. مقدار a را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + ۳x + ۲}{x + ۱} & x \neq -۱ \\ ۳a + ۷ & x = -۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + ۲$$

***

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه ی مشترک آنها تعریف کرد.

۱ : جمع دو تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\bigcap D_g$$

۲ : تفریق دو تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f\bigcap D_g$$

۳ : ضرب دو تابع

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$D_{f\times g}=D_f\bigcap D_g$$

۴ : تقسیم دو تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{x\in D_g\mid g(x)=۰\}$$

مثال : اگر $f(x)=x^۲+۵x+۶$ و $g(x)=x^۲+۳x$ ، تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(f+g)(x)$

۲) $(f-g)(x)$

۳) $(g-f)(x)$

۴) $(f\times g)(x)$

۵) $(f^۲)(x)$

۶) $(\frac{f}{g})(x)$

۷) D_{f+g}

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

۱) $(f+g)(x)=(x^۲+۵x+۶)+(x^۲+۳x)$

$=x^۲+۵x+۶+x^۲+۳x=۲x^۲+۸x+۶$

۲) $(f+g)(x)=(x^۲+۵x+۶)-(x^۲+۳x)$

$=x^۲+۵x+۶-x^۲-۳x=۲x+۶$

۳) $(g-f)(x)=(x^۲+۳x)-(x^۲+۵x+۶)$

$=x^۲+۳x-x^۲-۵x-۶=-۲x-۶$

$$۴)\ (f \times g)(x) = (x^{۲} + ۵x + ۶) \times (x^{۲} + ۳x)$$

$$= x^{۴} + ۳x^{۳} + ۵x^{۳} + ۱۵x^{۲} + ۶x^{۲} + ۱۸x = x^{۴} + ۸x^{۳} + ۲۱x^{۲} + ۱۸x$$

$$۵)\ (g \times f)(x) = (x^{۲} + ۵x + ۶) \times (x^{۲} + ۵x + ۶)$$

$$= x^{۴} + ۵x^{۳} + ۶x^{۲} + ۵x^{۳} + ۲۵x^{۲} + ۳۰x + ۶x^{۲} + ۳۰x + ۳۶$$

$$= x^{۴} + ۱۰x^{۳} + ۳۷x^{۲} + ۶۰x + ۳۶$$

$$۶)\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{۲} + ۵x + ۶}{x^{۲} + ۳x} = \frac{(x+۲)(x+۳)}{x(x+۳)} = \frac{x+۲}{x}$$

$$۷)\ D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = R \bigcap R = R$$

توابع f و g هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه ی هر دو مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$۸)\ D_{\frac{f}{g}} = D_f \bigcap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\} = R \bigcap R - \{۰, -۳\} = R - \{۰, -۳\}$$

توجه داشته باشید که ریشه های مخرج $x = ۰$ و $x = -۳$ تابع g می باشند.

$$x^{۲} + ۳x = ۰ \rightarrow x(x+۳) = ۰ \rightarrow x = ۰\ ,\ x = -۳$$

مثال : اگر $f = \{(۱,۷),(۳,-۴),(۲,۲)\}$ و $g = \{(۱,۶),(۳,۵),(۴,۱),(۲,۰)\}$، هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

۱) D_f

۲) D_g

۳) D_{f+g}

۴) $f + g$

۵) $f - g$

۶) $f \times g$

۷) $D_{\frac{f}{g}}$

۸) $\frac{f}{g}$

حل :

۱) $D_f = \{۱,۳,۲\}$

۲) $D_g = \{۱,۳,۴,۲\}$

۳) $D_{f+g} = D_f + D_g = \{۱,۳,۲\} \bigcap \{۱,۳,۴,۲\} = \{۱,۲,۳\}$

اکنون برای تعیین توابع خواسته شده ، از روش تشکیل جدول استفاده می کنیم.

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	۱۳	۱	۲

۴) $f + g = \{(۱,۱۳),(۳,۲),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	۱	۹-	۲

۵) $f - g = \{(۱,۱),(۳,-۹),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	۷۲	۲۰-	۰

۶) $f \times g = \{(۱,۷۲),(۳,-۲۰),(۲,۰)\}$

۷) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \bigcap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\} \{۱,۳,۲\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

x	۱	۳
$f(x)$	۷	۴-
$g(x)$	۶	۵
$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{-۴}{۵}$

۸) $\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۷}{۶}),(۳,\frac{-۴}{۵})\}$

تمرین برای حل :

تمرین ۷۷) اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

در هر مورد دامنه ی تابع داده شده را تعیین و سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f+g$ ۳) $f.g$ ۵) $f^۲$

۲) $f-g$ ۴) $\frac{f}{g}$ ۶) $\sqrt{g}$

تمرین ۷۸) اگر $f(x)=x^۲-x$ و $g(x)=x^۲+۲x-۳$ باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(۲f-۳g)(۲)$

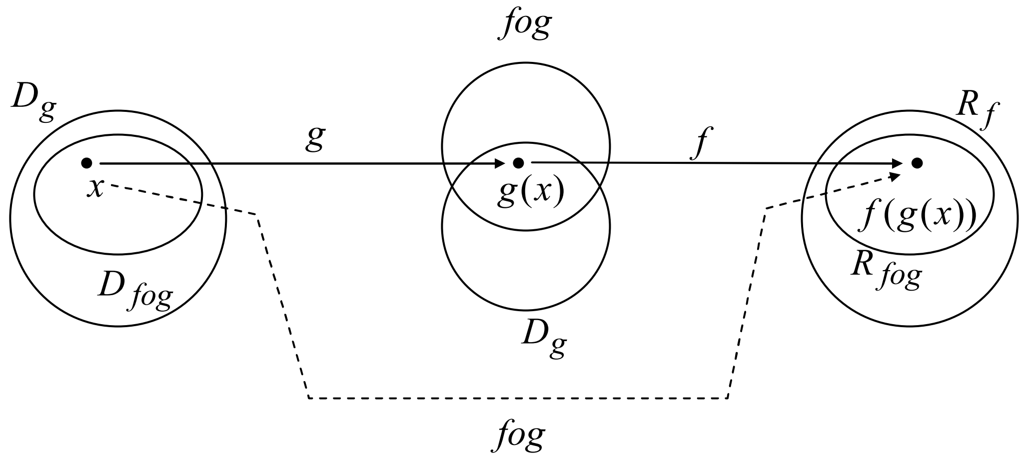
***

ترکیب دو تابع

هرگاه g و f دو تابع باشند، ترکیب تابع g در f که به صورت fog نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



دامنه ی تابع مرکب fog با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال : اگر $f(x) = x^۲ + ۳x - ۱$ و $g(x) = ۲x + ۵$. در این صورت تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(fog)(x) =$ ب) $(gof)(x) =$

حل : کافی است ، تعریف تابع مرکب را به دقت بکار ببریم.

الف) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲x + ۵) = (۲x + ۵)^۲ + ۳(۲x + ۵) - ۱$

$= ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ + ۶x + ۱۵ + ۱ = ۴x^۲ + ۲۶x + ۳۹$

ب) $(gof)(x) = ۲(x^۲ + ۳x - ۱) + ۵ = ۲x^۲ + ۶x - ۲ + ۵ = ۲x^۲ + ۶x + ۳$

نتیجه : با توجه به مثال فوق، مشخص می شود که ترکیب دو تابع در حالت کلی ، خاصیت جابجایی ندارد.

یعنی : $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = ۲x + ۵$. در این دامنه و ضابطه ی تابع fog را بدست آورید.

حل : ابتدا دامنه های توابع g و f را تعیین می کنیم.

تابع f یک تابع اصم است.

$x - ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱ \rightarrow D_f = [۱, +\infty)$

همچنین تابع g چند جمله ای است پس $D_g = R$

لذا با توجه به تعریف دامنه ی تابع fog می توان نوشت:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid (۲x+۵)\geq ۱\}$$

$$=\{x\in R \mid ۲x\geq -۴\}=\{x\in R \mid x\geq -۲\}$$

اکنون تابع fog را نیز به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۵)=\sqrt{(۲x+۵)-۱}=\sqrt{۲x+۴}$$

مثال: اگر $g(x)=۲x^۲-x+۱$ و $f(x)=x+۳$. مقدار m را طوری تعیین کنید که

$$(fog)(m)=(gof)(m)$$

حل:

$$(fog)(m)=f(g(m))=f(۲m^۲-m+۱)=۲m^۲-m+۴$$

$$(gof)(m)=g(f(m))=g(m+۳)=۲(m+۳)^۲-(m+۳)+۱=۲m^۲+۱۱m+۱۶$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-m+۴=۲m^۲+۱۱m+۱۶\rightarrow m=-۱$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۷),(۴,۶),(۰,۹)\}$ و $g=\{(-۱,۵),(۸,۱),(۲,۴),(۰,۰)\}$، ابتدا دامنه ی تابع fog را تعیین نموده و سپس این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل : با توجه به تعریف دامنه ی تابع fog جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$D_f=\{۱,۳,۴,۰\}$ و $D_g=\{-۱,۸,۲,۰\}$

$x\in D_g$	$g(x)$
۱-	$۵\notin D_f$
۸	$۱\in D_f$
۲	$۴\in D_f$
۰	$۰\in D_f$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۸,۲,۰\}$$

اکنون برای تعیین fog به شکل زیر عمل می کنیم.

$$(fog)(۸)=f(g(۸))=f(۱)=۲$$

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۴)=۶$$

$(fog)(۰) = f(g(۰)) = f(۰) = ۹$

$\Rightarrow fog = \{(۸,۲),(۲,۶),(۰,۹)\}$

تمرین برای حل :

تمرین ۷۹) توابع $g(x) = ۲x - ۳$ و $f(x) = \sqrt{x+۱}$ داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف) $(gof)(x)$ ب) D_{fog}

تمرین ۸۰) اگـر $g(x) = x^۲ - ۴x$ و $f(x) = ۲x - ۱$ باشـد. توابـع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

تمرین ۸۱) اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = ۲x + ۳$ باشد. مطلوبست محاسبه ی

الف) $(fog)(۴)$ ب) $(fof)(x)$

تمرین ۸۲) اگر $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ و $g(x) = x^۲$ ابتـدا دامنـه‌ی تـابع fog را تعیـین نمـوده و سـپس معادله‌ی آنرا بدست آورید.

تمرین ۸۳) اگر $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = ۳x + k$ باشد. مقدار k را طوری بیابید که

$$(fog)(x) = (gof)(x)$$

تمرین ۸۴) توابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ و $g(x) = -۲x + ۱$ داده شده اند.

الف : دامنه ی توابع f و g را به دست آورید. ب : ضابطه و دامنه ی تابع fog را تعیین کنید.

ج : مقدار عددی $(۲f + g)(۱)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۸۵) اگر $f(x) = \sqrt{x - ۳}$ و $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶),(۷,۰)\}$

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

***

تابع های زوج و تابع های فرد

در این قسمت به معرفی تابع های زوج و فرد می پردازیم.

تابع زوج : تابع f را زوج می نامند، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد.

الف) دامنه ی تابع متقارن باشد.

ب) $f(-x)=f(x)$ (یعنی با تبدیل x به $-x$ همان تابع بدست می آید.)

تابع فرد : تابع f را فرد می نامند، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد.

الف) دامنه ی تابع متقارن باشد.

ب) $f(-x)=-f(x)$ (یعنی با تبدیل x به $-x$ قرینه ی تابع بدست می آید.)

توجه : مجموعه ای را متقارن می نامند، هرگاه هر عضو آن مجموعه، قرینه اش نیز عضو مجموعه باشد.

مانند، مجموعه های زیر

$D=R$ $\qquad$ $A=\{-۳,۵,۰,-۵,۳\}$

$E=R-\{۱,-۱\}$ $\qquad$ $B=\{-۲,۲\}$

$F=R-\{۰\}$ $\qquad$ $C=(-۳,۳)$

ولی مجموعه های زیر متقارن نیستند.

$C=R-\{۱\}$ و $B=(-۳,۳]$ و $A=\{-۳,۵,۰,-۴,۳\}$

مثال : زوج یا فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=x^۲+|x|$

۲) $f(x)=x^۳+\frac{۱}{x}$

۳) $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$

۴) $f(x)=۲x+x^۴$

۵) $f(x)=\frac{۲}{۳x-۱۵}$

۶) $f(x)=x^۲+\cos x$

حل :

۱) $f(x)=x^۲+|x|$

$D_f=R\rightarrow$ دامنه متقارن است.

$f(-x)=(-x)^۲+|-x|=x^۲+|x|=f(x)$

لذا تابع زوج است.

$$۲)\ f(x)=x^{۳}+\frac{۱}{x}$$

$D_f=R-\{۰\}\rightarrow$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=(-x)^{۳}+\frac{۱}{(-x)}=-x^{۳}+\frac{۱}{-x}=-(x^{۳}+\frac{۱}{x})=-f(x)$$

لذا تابع فرد است.

$$۳)\ f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$$

$$۹-x^{۲}\geq ۰\rightarrow -x^{۲}\geq -۹\rightarrow x^{۲}\leq ۹\rightarrow -۳\leq x\leq ۳$$

$D_f=[-۳,۳]\rightarrow$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=\sqrt{۹-(-x)^{۲}}=\sqrt{۹-x^{۲}}=f(x)$$

لذا تابع زوج است.

$$۴)\ f(x)=۲x+x^{۴}$$

$D_f=R\rightarrow$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=۲(-x)+(-x)^{۴}=-۲x+x^{۴}\left\langle\begin{array}{l}\neq f(x)\\ \neq -f(x)\end{array}\right.$$

لذا تابع نه زوج و نه فرد است.

$$۵)\ f(x)=\frac{۲}{۳x-۱۵}$$

$$۳x-۱۵=۰\rightarrow x=۵$$

$D_f=R-\{۵\}\rightarrow$ دامنه متقارن نیست.

لذا تابع نه زوج و نه فرد است.

$$۶)\ f(x)=x^{۲}+\cos x$$

$D_f=R\rightarrow$ دامنه متقارن است.

$$f(-x)=(-x)^{۲}+\cos(-x)=x^{۲}+\cos x=f(x)$$

لذا تابع زوج است.

توجه داشته باشید که :

$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha) \quad \text{و} \quad \cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

تمرین برای حل: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۸۶) $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۴}$

۸۷) $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$

۸۸) $f(x)=\dfrac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۸۹) $f(x)=x^{۳}-\sin x$

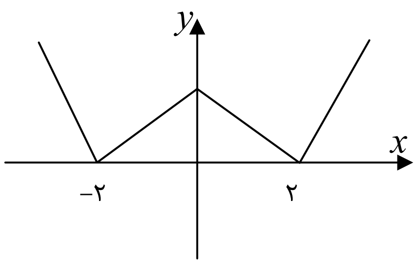
۹۰) $f(x)=x.\sin x$

تمرین ۹۱) ثابت کنید که تابع $f(x)=\dfrac{|x|+\cos x}{x^{۴}}$ زوج است.

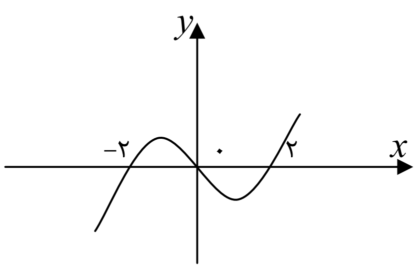
تمرین ۹۲) ثابت کنید که تابع $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^{۲}-۱}$ فرد است.

با توجه به تعریف توابع زوج و فرد به سهولت می توان به نتایج زیر رسید.

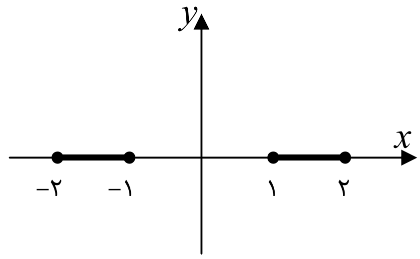
الف) نمودار هر تابع زوج نسبت به محور عرض ها (y ها) متقارن است.



ب) نمودار هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



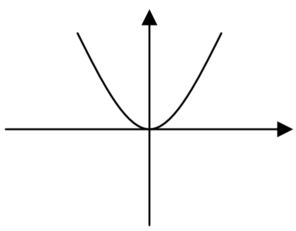
ج) هر تابع با دامنه ی متقارن و ضابطه ی $f(x)=۰$ هم زوج و هم فرد است.



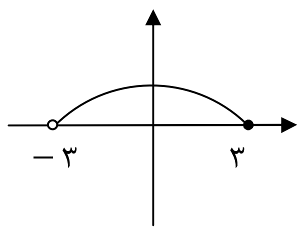
تمرین برای حل:

تمرین۹۳) سه تابع بنویسید که هم زوج و هم فرد باشند.

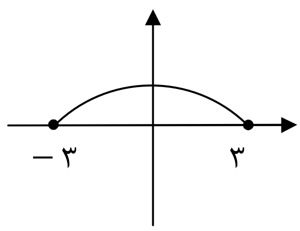
تمرین۹۴) زوج یا فرد بودن هر یک از توابع مربوط به نمودار های زیر را بررسی کنید.



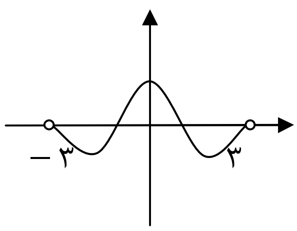
(۱)



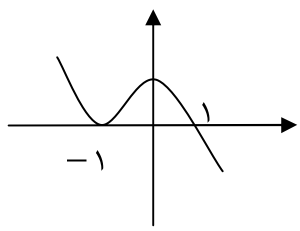
(۲)



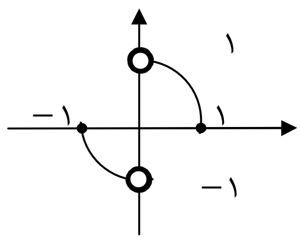
(۳)



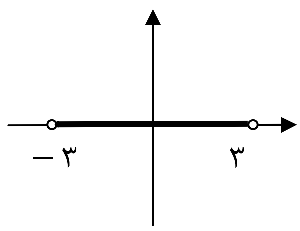
(۴)



(۵)



(۶)



(۷)

***

تابع یک به یک

هر تابع که مؤلفه های دوّم هیچ دو زوج مرتب آن مساوی نباشند را تابع یک به یک می نامند. برای مثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a=b$

$$a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b$$

$$|a|=|b|\not\rightarrow a=b$$

$$[a]=[b]\not\rightarrow a=b$$

تمرین برای حل:

تمرین ۹۵) اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

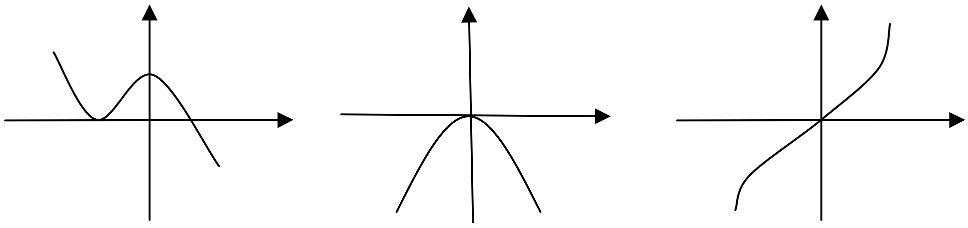
تمرین۹۶) نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{۲x}{x+۱}$ یک به یک است.

تمرین۹۷) با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

الف) $f(x)=۲[x]+۱$ ب) $g(x)=۲x^{۳}-۵$

بنابر بر تعریف تابع یک به یک می توان نتیجه گرفت که اگر نمودار تابع معلوم باشد، این تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها (xها) ، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



(الف) (ب) (ج)

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند ولی تابع (ج) یک به یک است.

توجه کنید که

۱) تابع همانی یک به یک است.

۲) تابع ثابت یک به یک نیست.

۳) هر تابع زوج که دامنه اش حداقل دو عضو داشته باشد، یک به یک نیست.

تمرین برای حل:

تمرین۹۸) نمودار یک تابعی را رسم کنید که فرد باشد ولی یک به یک نباشد.

***

تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدید را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f = \{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g = \{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس f

ب) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f = \{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g = \{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

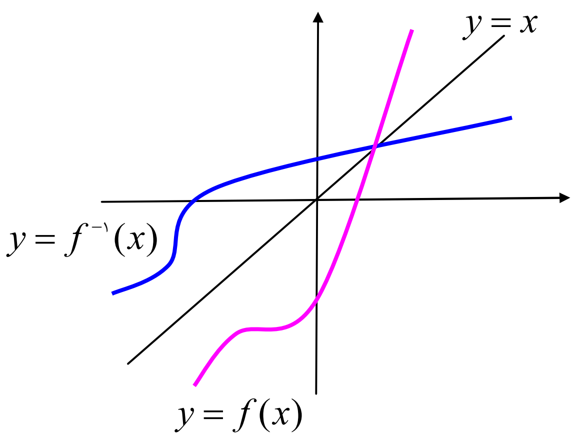
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه ی تابع $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. ($D_{f^{-۱}} = R_f$)

ج) برد تابع $f^{-۱}$ برابر دامنه ی تابع f است. ($R_{f^{-۱}} = D_f$)

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ($y = x$) متقارن هستند.



تمرین برای حل:

تمرین ۹۹) کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله ی آن معلوم باشد. به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\to ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\to x^۲=۲y-۳\to y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$
$$\therefore f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

تمرین برای حل: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۰۰) $f(x)=۳x^۲+۱$

۱۰۱) $f(x)=۳x-۱$

۱۰۲) $f(x)=۳|x|+۵$

۱۰۳) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

۱۰۴) $f(x)=۱+۲^x$

۱۰۵) $f(x)=۳+\log^x$

***

تابع خطی

هر تابع که بین مولفه های اول ودوم تمام زوج های مرتب آن یک رابطه ی خطی یکسانی وجود داشته باشد، را تابع خطی می نامند.

مانند تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۰,۱),(-۱,-۱)\}$ که در تمام زوج های آن رابطه‌ی $y=۲x+۱$ برقرار است.

تذکر : هر تابع خطی دارای معادله ای به صورت زیر است.

$$f(x)=ax+b$$

لذا نمودار آن همواره یک خط راست است. (عدد a را شیب و عدد b را عرض از مبدأ می نامند.)

مثال: معادله‌ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$ و $(۵,۳)$ می گذرد.

حل :

روش اول :

$$(۵,۳)\in f \rightarrow ۳=۵a+b$$

$$(۲,۷)\in f \rightarrow ۷=۲a+b$$

$$\begin{cases}۵a+b=۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \rightarrow (-۱)\times\begin{cases}۵a+b=۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-۵a-b=-۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \rightarrow -۳a=۴ \rightarrow a=\frac{۴}{-۳}\ ,\ b=\frac{۱۳}{۳}$$

$$f(x)=ax+b \rightarrow f(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$ معادله ی تابع خطی

روش دوم :

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱ \rightarrow y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳ \rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

تمرین برای حل:

تمرین ۱۰۶) معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات گذشته و در آن $f(۲) = ۳$ باشد

تمرین ۱۰۷) در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد، داریم $f(۳) = ۱۵$ رابطه ی ریاضی برای وارون این تابع به دست آورید.

تمرین ۱۰۷) آیا هر تابع خطی معکوس پذیر است. برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

***

روش های رسم نمودار توابع

در این قسمت با روش های رسم چند تابع آشنا می شویم.

الف) تابع درجه اوّل (تابع خطی)

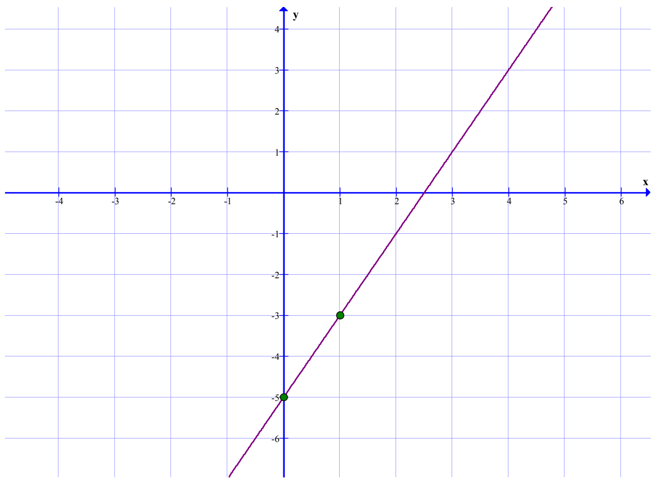
هر تابع به معادله ی کلی $f(x) = ax + b$ که در آن $a \neq ۰$ باشد، را تابع درجه اوّل(خطی) می نامند.

نمودار هر تابع خطی همواره یک خط راست می باشد، لذا برای رسم نمودار آن ، انتخاب دو نقطه کافی است.

مثال : نمودار تابع $f(x) = ۲x - ۵$ را رسم کنید.

حل : کافی است دو مقدار دلخواه برای x در نظر بگیریم و بعد از تعیین مقدار y متناظر آنها، نقطه یابی کرده و نمودار را رسم کنیم.

x	۰	۱
y	-۵	-۳



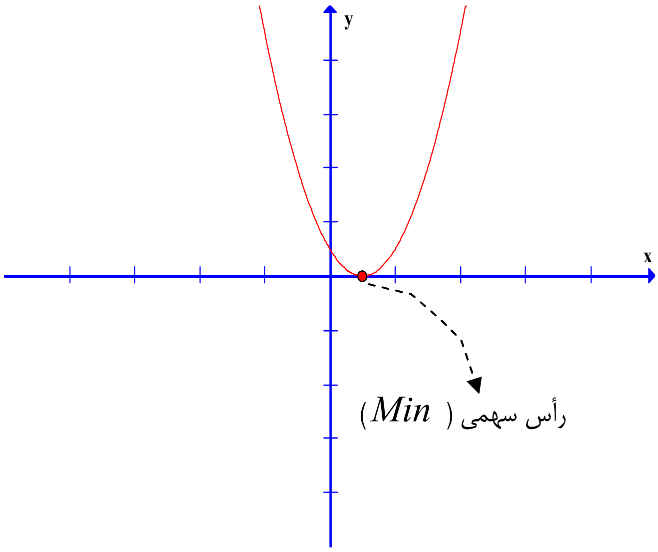
***

ب) تابع درجه دوّم (تابع سهمی)

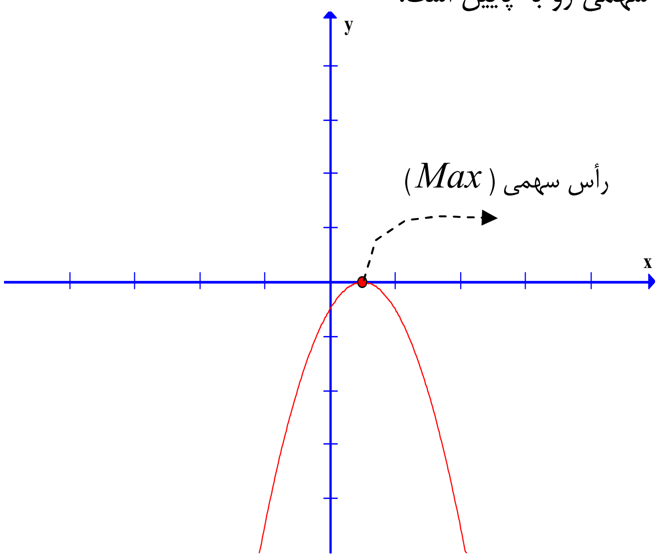
هر تابع به معادله ی کلی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$ باشد، را درجه ی دوّم (سهمی) می نامند. نمودار سهمی همواره به یکی از شکل های زیر است.

پس نمودار سهمی دارای بالاترین نقطه یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی نیز می نامند.

اگر $a > ۰$ باشد، نمودار سهمی رو به بالا است.



اگر $a < ۰$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین است.



طول رأس سهمی را می توان از رابطه ی زیر بدست آورد.

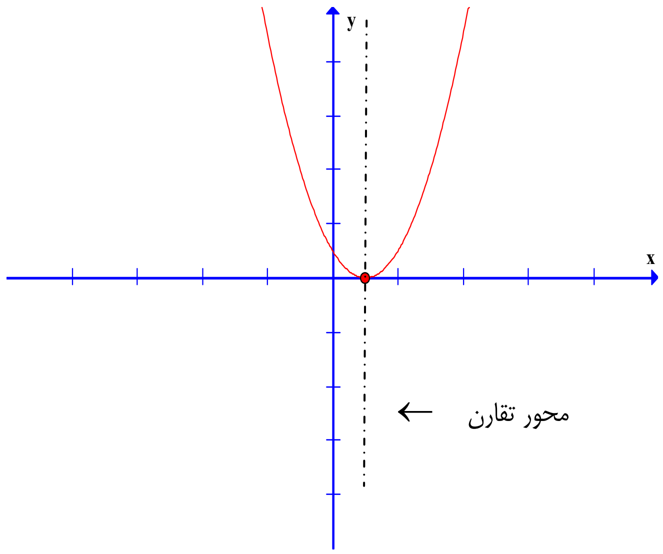
$$x_۰ = \frac{-b}{۲a}$$

با قرار دادن مقدار $x_۰$ بدست آمده ، در معادله ی سهمی مقدار $y_۰$ یعنی عرض رأس سهمی را تعیین کرد.

***

نمودار هر سهمی متقارن است. محور تقارن آن خطی است موازی محور عرض ها که از رأس سهمی می گذرد. معادله ی محور تقارن سهمی را می توان از رابطه ی زیر بدست آورد.

$$x = \frac{-b}{۲a}$$



***

مثال: سهمی به معادله ی $y = -۳x^۲ + ۶x$ داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه ی Min است یا Max .

ج : معادله ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

حل:

$$y = -۳x^۲ + ۶x \quad \to a = -۳ \ , \ b = ۶ \ , \ c = ۰$$

طول رأس سهمی $x_۰ = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲(-۳)} = \frac{-۶}{-۶} = ۱$

عرض رأس سهمی $y_۰ = -۳(۱)^۲ + ۶(۱) = -۳ + ۶ = ۳$

مختصات رأس سهمی $S(۱,۳)$

چون a منفی است، پس رأس سهمی نقطه ی Max نمودار آن می باشد.

معادله ی محور تقارن $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲(-۳)}=\frac{-۶}{-۶}=۱ \to x=۱$

***

مثال سهمی به معادله ی $y=۲x^۲-۸x+۱$ داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه ی Min است یا Max .

ج : معادله ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

حل:

$y=۲x^۲-۸x+۱ \quad \to a=۲ \ , \ b=-۸ \ , \ c=۱$

طول رأس سهمی $x_۰=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۸}{۲(۲)}=\frac{۸}{۴}=۲$

عرض رأس سهمی $y_۰=۲(۲)^۲-۸(۲)+۱=۸-۱۶+۱=-۷$

مختصات رأس سهمی $S(۲,-۷)$

چون a مثبت است، پس رأس سهمی نقطه ی Min نمودار آن می باشد.

معادله ی محور تقارن $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۸}{۲(۲)}=\frac{۸}{۴}=۲ \to x=۲$

***

برای **رسم نمودار سهمی** به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : مختصات رأس سهمی را تعیین می کنیم.

۲ : دو نقطه را چنان انتخاب می کنیم که طول یکی کمتر و طول دیگری بیشتر از طول رأس سهمی باشد.

با قرار دادن این طول ها در معادله ی سهمی عرض های متناظر آن ها را تعیین می کنیم.

۳ : نقاط بدست آمده را روی دستگاه محور های مختصات پیدا کرده و نمودار را رسم می کنیم.

***

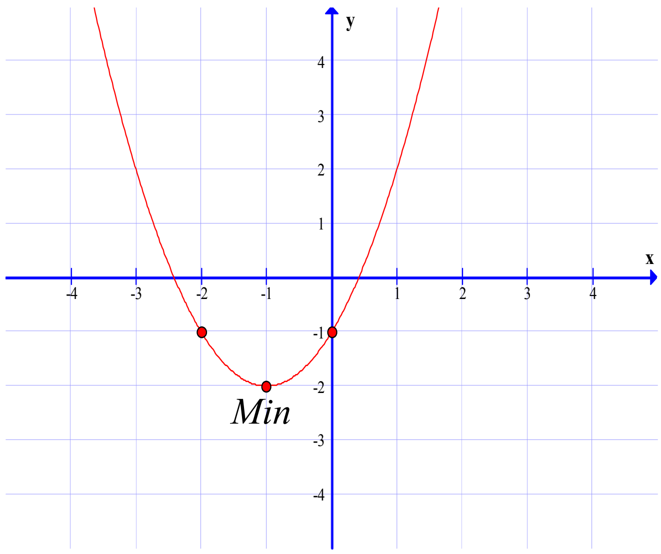
مثال : نمودار سهمی به معادله ی $y=x^۲+۲x-۱$ را رسم کنید.

حل :

$$y = x^{۲} + ۲x - ۱ \quad \rightarrow a = ۱ \ , \ b = ۲ \ , \ c = -۱$$

طول رأس سهمی $\quad x_{۰} = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-۲}{۲(۱)} = \dfrac{-۲}{۲} = -۱$

x	-۲	-۱	۰
y	-۱	-۲	-۱



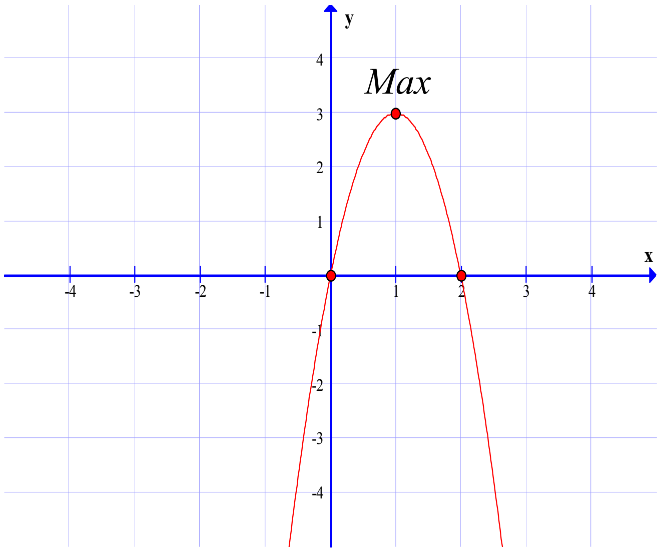
مثال : نمودار سهمی به معادله ی $y = -۳x^{۲} + ۶x$ را رسم کنید.

حل :

$$y = -۳x^{۲} + ۶x \quad \rightarrow a = -۳ \ , \ b = ۶$$

طول رأس سهمی $\quad x_{۰} = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-۶}{۲(-۳)} = \dfrac{-۶}{-۶} = ۱$

x	۰	۱	۲
y	۰	۳	۰



***

مثال : نمودار سهمی به معادله ی $y=۲(x-۱)^{۲}+۲$ را رسم کنید.

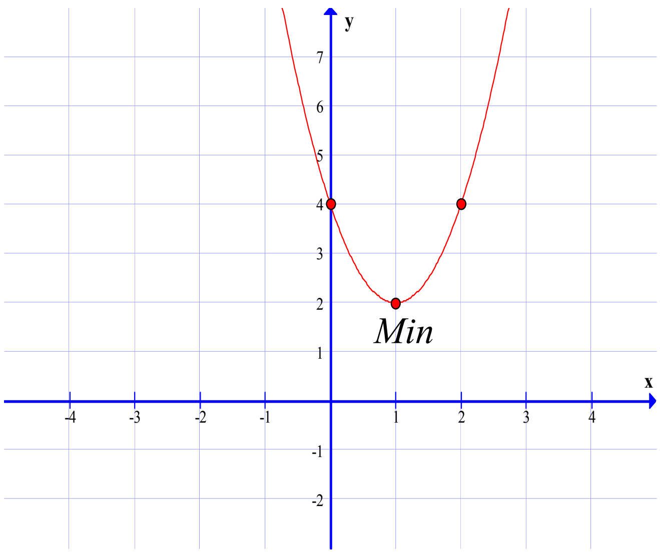
حل :

$$y=۲(x-۱)^{۲}+۲\rightarrow y=۲(x^{۲}-۲x+۱)+۲$$

$$\rightarrow y=۲x^{۲}-۴x+۴\quad \rightarrow a=۲\ ,\ b=-۴\ ,\ c=۴$$

طول رأس سهمی $x_{۰}=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۴}{۲(۲)}=\frac{۴}{۴}=۱$

x	۰	۱	۲
y	۴	۲	۴



***

مثال : مختصات نقطه ی ماگزیمم یا می نیمم تابع زیر را تعیین کنید و مشخص کنید که این نقطه ماگزیمم است یا می نیمم؟

$$y=-x^{۲}+۱۲x-۴۲$$

حل :

$y=-x^{۲}+۱۲x-۴۲ \quad , \quad a=-۱ \quad , \quad b=۱۲ \quad , \quad c=-۴۲$

طول رأس سهمی $x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲}{۲(-۱)}=\frac{-۱۲}{-۲}=۶$

عرض رأس سهمی $y_{\circ}=-(۶)^{۲}+۱۲(۶)-۴۲=-۳۶+۷۲-۴۲=-۶$

مختصات رأس سهمی $S(۶,-۶)$

چون a منفی است، پس رأس سهمی نقطه ی Max نمودار آن می باشد.

***

تمرین برای حل: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱۰۸) $y=-۳x+۱$

۱۰۹) $y=-x^{۲}+۲x+۳$

۱۱۰) $y=۲x^{۲}+۴x$

۱۱۱) $y=x^{۲}+۶x-۱$

تمرین ۱۱۲) مقدار m را چنان بیابید که خط $x=۲$ محور تقارن سهمی به معادله ی زیر باشد.

$$y=۳x^{۲}+(m+۱)x-۱$$

***

حل مسائل بهنیه سازی به کمک تابع درجه ی دوّم

منظور از بهینه سازی در حل یک مسئله یافتن بیشترین مقدار یا کمترین مقدار ممکن می باشد. بـرای مثـال یافتن بیشترین مساحت مستطیلی که محیط آن معلوم باشد.

برای حل چنین مسائلی اغلب از سهمی و خواص آن کمک می گیریم. بدین صورت است که ابتدا بـه کمـک اطلاعات مسئله یک تابع درجه ی دوّم یک متغیره تشکیل می دهیم و نقاط ماکزیمم یا می نیمم آن را تعیین می کنیم.

مثال : عدد ۱۲ را به دو قسمت طوری تقسیم کنید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم شود.

حل :

$$x+y=12 \rightarrow y=12-x$$

$$P=xy \rightarrow P=x(12-x)=12x-x^{2}$$ تابع ضرب

این تابع ، سهمی است و چون $a=-1<0$ است، پس سهمی رو به پایین و مقدار ماکزیمم دارد.

$$x_{0}=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2(-1)}=6$$

$$y_{0}=12-6=6$$

در این صورت بیشترین حاصل ضرب، می شود:

$$P_{Max}=12(6)-(6)^{2}=72-36=36$$

نکته : اگر داشته باشیم $mx+ny=k$ باشد. در این صورت حاصل xy وقتی ماگزیمم است که

$$\begin{cases} x=\frac{k}{2m} \\ y=\frac{k}{2n} \end{cases}$$

که در آن باید m و n و k هر سه مثبت باشند.

مثال : اگر داشته باشیم $3x+2y=60$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم باشد.

حل :

$$3x+2y=60$$

$$\begin{cases} x=\frac{k}{2m}=\frac{60}{2(3)}=\frac{60}{6}=10 \\ y=\frac{k}{2n}=\frac{60}{2(2)}=\frac{60}{4}=15 \end{cases}$$

***

تمرین : اگر داشته باشیم $2x+y=40$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم باشد.

حل :

$$2x+y=40$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{2m}=\dfrac{40}{2(2)}=\dfrac{40}{4}=10 \\ y=\dfrac{k}{2n}=\dfrac{40}{2(1)}=\dfrac{40}{2}=20 \end{cases}$$

***

مثال : اگر داشته باشیم $3x+4y=240$ ماگزیمم مقدار xy را بیابید.

حل :

$$3x+4y=240$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{2m}=\dfrac{240}{2(3)}=\dfrac{240}{6}=40 \\ y=\dfrac{k}{2n}=\dfrac{240}{2(4)}=\dfrac{240}{8}=30 \end{cases} \Rightarrow xy=(40)(30)=1200$$

***

مثال : عدد ۲۰ را به دو قسمت طوری تقسیم کنید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم شود.

حل :

$$x+y=20$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{2m}=\dfrac{20}{2(1)}=\dfrac{20}{2}=10 \\ y=\dfrac{k}{2n}=\dfrac{20}{2(1)}=\dfrac{20}{2}=10 \end{cases}$$

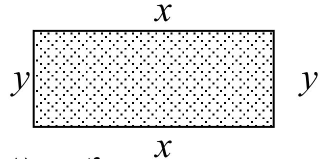
***

مثال : محیط مستطیلی ۴۰ متر است ، طول و عرض آن را طوری تعیین کنید که مساحت آن ماگزیمم شود.

حل :

(عرض + طول) × ۲ = محیط مستطیل

$$2(x+y)=40 \rightarrow 2x+2y=40$$



$$2x+2y=40$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{2m}=\dfrac{40}{2(2)}=\dfrac{40}{4}=10 \\ y=\dfrac{k}{2n}=\dfrac{40}{2(2)}=\dfrac{40}{4}=10 \end{cases}$$

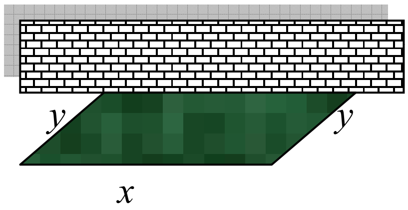
***

مثال : برای ساختن یک باغچه به شکل مستطیل در کنار یک دیوار ۱۰۰ متر سـیم طـوری در اختیـار اسـت. طول و عرض باغچه را طوری تعیین کنید که مساحت آن ماگزیمم شود.

حل :

عرض × ۲ + طول= محیط باغچه

$x+۲y=۱۰۰$



$x+۲y=۱۰۰$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{۲m}=\dfrac{۱۰۰}{۲(۱)}=\dfrac{۱۰۰}{۲}=۵۰ \\ y=\dfrac{k}{۲n}=\dfrac{۱۰۰}{۲(۲)}=\dfrac{۱۰۰}{۴}=۲۵ \end{cases}$$

***

ج) رسم نمودار توابع چند ضابطه ای

برای رسم نمودار تابع چنین توابعی کافی است با توجه ی به محدوده ی تعیین شده برای هر ضابطه ، نمودار هر ضابطه را جداگانه ولی در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

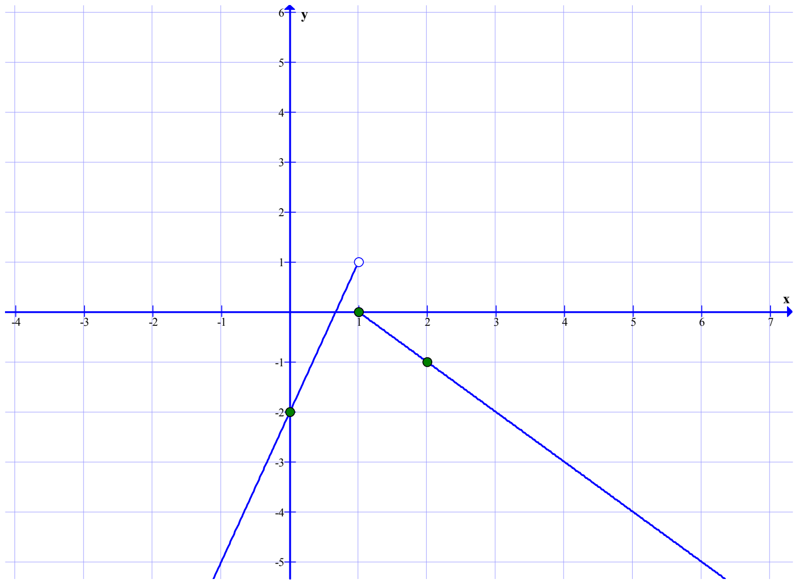
مثال : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۲ & x<۱ \\ -x+۱ & x\geq ۱ \end{cases}$$

حل : کافی است نمودار دو تابع $y=۳x-۲$ و $y=-x+۱$ را جداگانه رسم کنیم.

$y=۳x-۲$		
x	۱	۰
y	۱	-۲

$y=-x+۱$		
x	۱	۲
y	۰	-۱



مثال : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

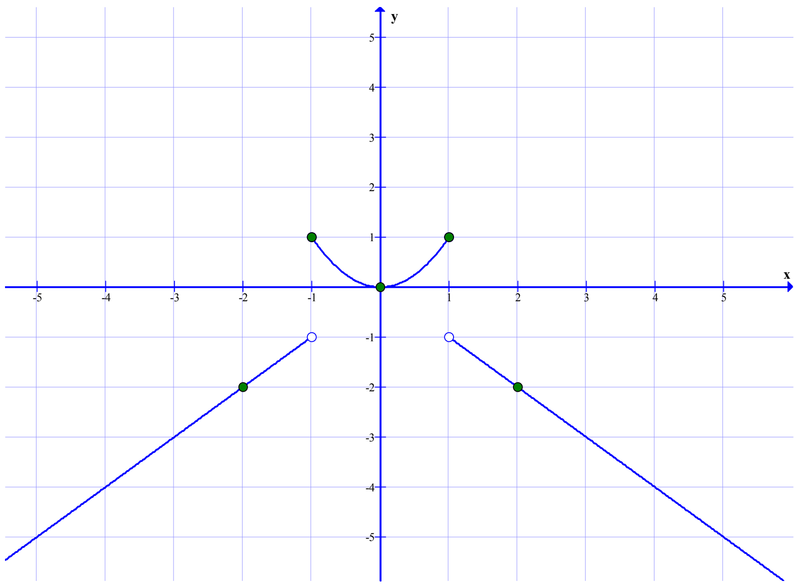
$$f(x)=\begin{cases}-x & x>۱\\ x^{۲} & -۱\le x\le ۱\\ x & x<-۱\end{cases}$$

حل : در این مورد مانند مثال قبل عمل می کنیم. ولی با سه ضابطه سروکار داریم.

$y=-x$		
x	۱	۲
y	-۱	-۲

$y=x^{۲}$			
x	۱	۰	-۱
y	۰	۰	-۱

$y=x$		
x	-۱	-۲
y	-۱	-۲



***

تمرین برای حل: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$۱۱۳)\quad f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\leq ۱ \\ ۳-x & x>۱ \end{cases}$$

$$۱۱۴)\quad f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$۱۱۵)\quad f(x)=\begin{cases} ۳ & x\geq ۲ \\ x-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -۳ & x<-۱ \end{cases}$$

$$۱۱۶)\quad f(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۰ & -۱\leq x\leq ۱ \\ -۲x & x<-۱ \end{cases}$$

$$۱۱۷)\quad f(x)=\begin{cases} ۲-x & x>۱ \\ x^{۲} & -۱\leq x\leq ۱ \\ x+۲ & x<-۱ \end{cases}$$

$$۱۱۸)\quad f(x)=\begin{cases} -x-۲ & x<-۲ \\ x+۲ & -۲\leq x<-۱ \\ ۱ & -۱\leq x\leq ۱ \\ -x+۲ & ۱<x\leq ۲ \\ x-۲ & x>۲ \end{cases}$$

***

فصل دوّم

حد و پیوستگی

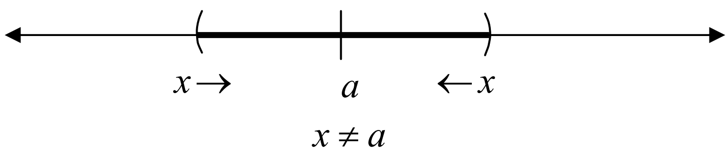
مفهوم حد ، یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت دقیق رفتار تـابع می گردد. با وجود پیچیدگی در تعریف حد ، در این فصل فقط به درک شهودی آن مـی پـردازیم و در ادامـه مفهوم دیگری تحت عنوان پیوستگی را معرفی می کنیم.

❋❋❋

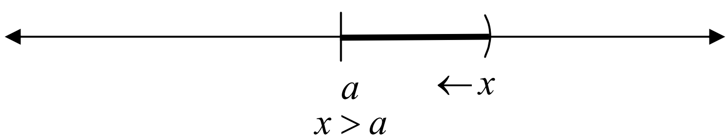
معرفی چند مفهوم اوّلیه

در ابتدا مفاهیم اوّلیه ی زیر را برای درک، مفهوم حد، معرفی کنیم.

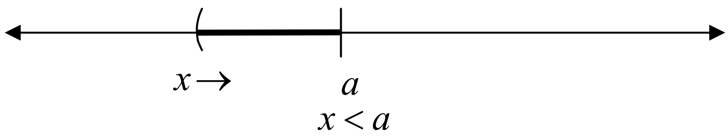
۱) منظور از نماد $x \to a$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a) ، یعنی متغیر x از دو طرف محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x \neq a$



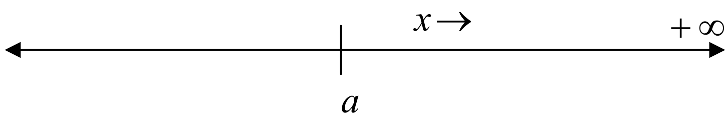
۲) منظور از نماد $x \to a^+$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از راست) ، یعنی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x > a$



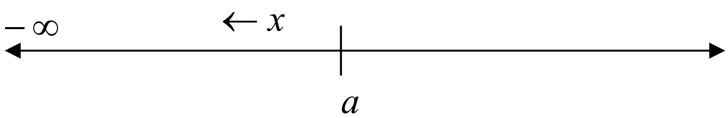
۳) منظور از نماد $x \to a^-$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از چپ) ، یعنی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x < a$



۴) منظور از نماد $x \to +\infty$ (می خوانند x میل می کند، به سمت مثبت بی نهایت[1]) ، یعنی مقادیر مثبت x بدون کران افزایش می یابند. به عبارتی دیگر یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده ی مثبت بزرگ‌تر است.



۵) منظور از نماد $x \to -\infty$ (می خوانند x میل می کند، به سمت منفی بی نهایت) ، یعنی مقادیر منفی x بدون کران کاهش می یابند. به عبارتی دیگر یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده ی منفی کوچک‌تر است.



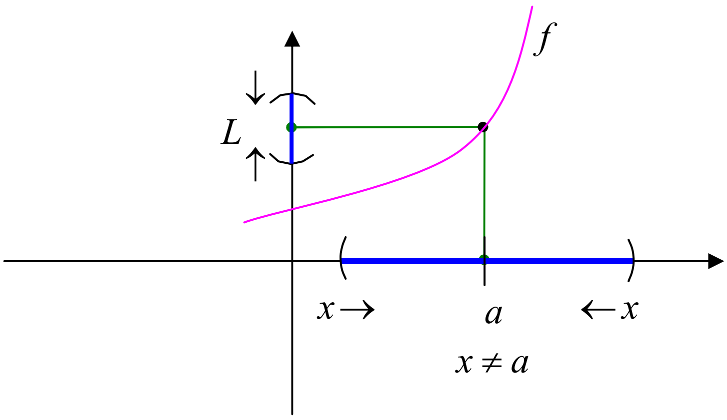
***

مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

وقتی متغیر x از دو طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L شود، گویند حد تابع f در $x = a$ برابر L است و می نویسند.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

[1] . بینهایت مفهومی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات (با تعبیرات مختلف) به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای« فراتر از هـر مقدار» است. معمولاً نشانه ی بینهایت در ریاضیات ∞ است. مفهوم بی نهایت زمانی که بکار می رود که می خواهند بیان کنند چیزی پایان ندارد. لذا بی نهایت یک عدد واقعی نیست و نمی توان اعمال ریاضی را روی آن انجام داد.



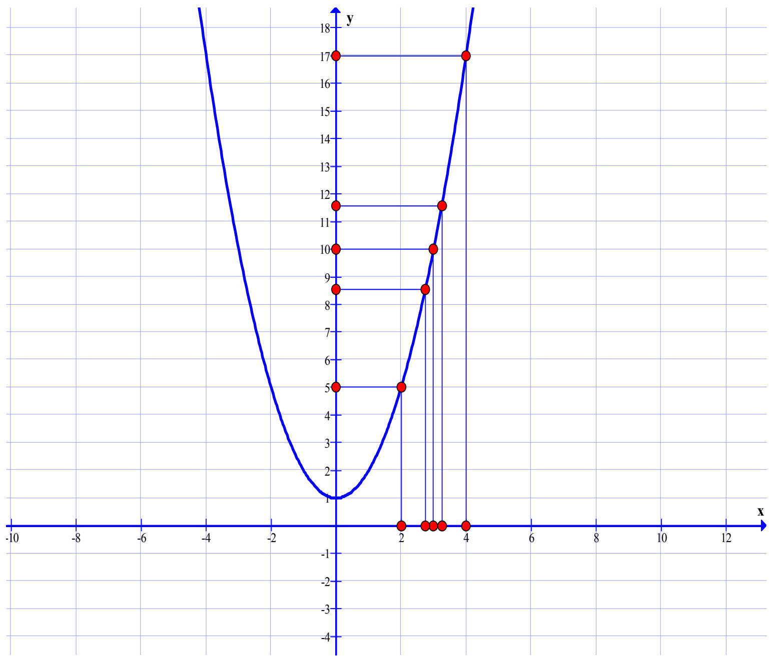
مثال : در تابع $f(x) = x^{۲} + ۱$ اگر متغیر x از دو طرف به عدد ۳ نزدیک شود. آنگاه مقادیر تابع به عدد ۱۰ نزدیک می شوند. در این صورت $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$. به جدول و نمودار زیر توجه کنید.

جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$$

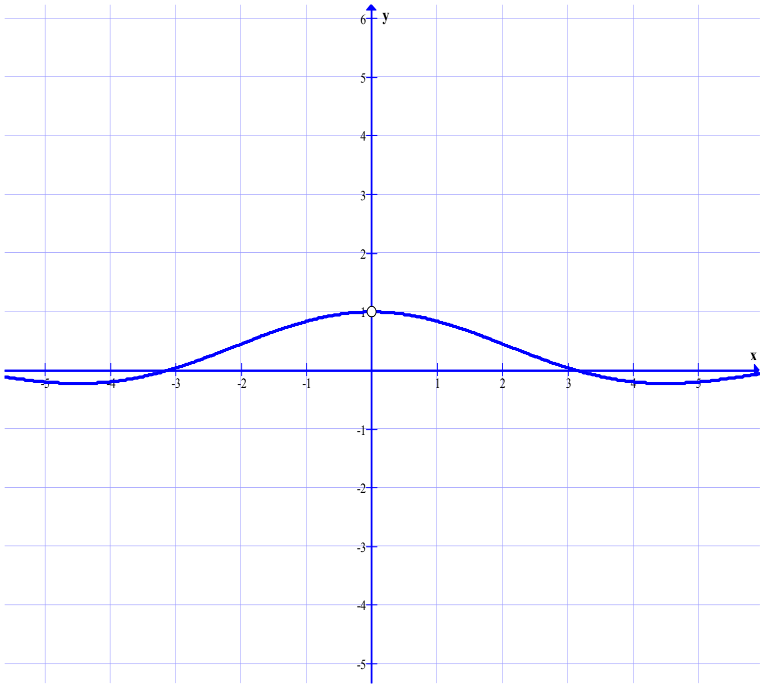
نمودار



تمرین برای حل :

تمرین ۱) با توجه به شکل زیر حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=$$



در اکثر مواقع با جایگزینی مقدار به جای x در معادله ی تابع ، می توان حد توابع را محاسبه نمود. این روش را روش جایگزینی مستقیم می نامند. برای مثال برای محاسبه ی حد تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ وقتی x به سمت ۳ میل می کند. می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین برای حل :

تمرین ۲) حد تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ در نقطه ی $x=۶$ را بدست آورید.

تمرین ۳) حد تابع $f(x)=\dfrac{۴x}{x-۱}$ در نقطه ی $x=۳$ را بدست آورید.

***

حد های یک طرفه

اگر متغیر x فقط از طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند. با مفهوم حد های یک طرفه سروکار داریم.

حد راست : وقتی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_۱$ شود، گویند حد راست تابع f در $x=a$ برابر $L_۱$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_۱$$

حد چپ : وقتی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_۲$ شود، گویند حد چپ تابع f در $x=a$ برابر $L_۲$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_۲$$

مثال : حد راست تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\ge ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} x+۱ = ۲+۱ = ۳$$

***

مثال : حد چپ تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\ge ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

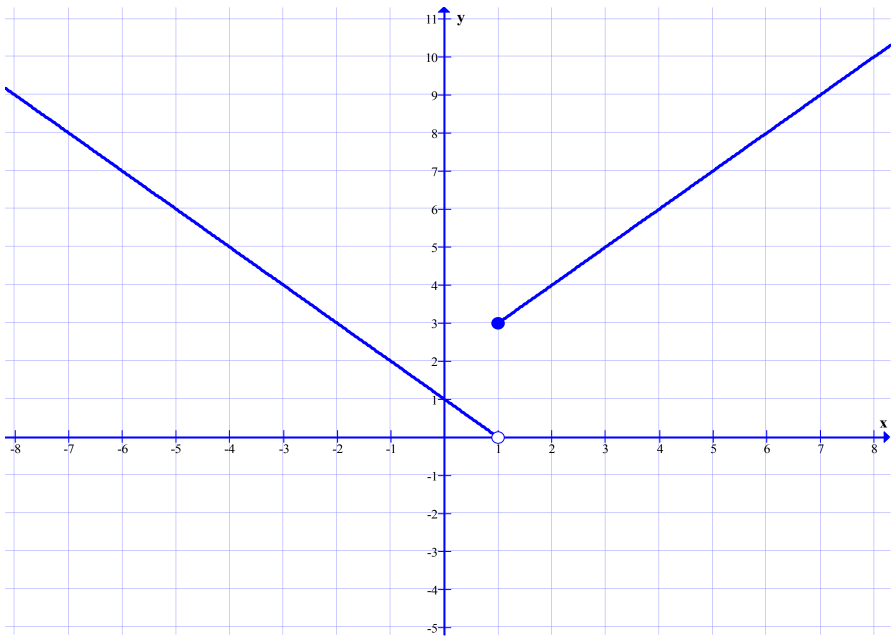
حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} -x = -۲$$

***

مثال : با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه ی

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)$ ج) $f(۱)$



حل :

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=۳$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=۰$ ج) $f(۱)=۳$

مثال: حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^{۲} & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} (۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}} (x^{۲})=(۲)^{۲}=۴$

مقدار $f(۲)=۳(۲)-۱=۵$

تمرین برای حل :

تمرین ۴) حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه ی $x=۱$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}+۳} & x>۱\\ ۳x+۲ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

گویند تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x=a$ دارای حد است، هرگاه در این نقطه حد راست و چپ آن عدد های مساوی شوند.

مثال : نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=۳$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲x & x\geq ۳\\ ۵x & x<۳\end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}}(x^{۲}+۲x)=(۳)^{۲}+۲(۳)=۱۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}}(۵x) \quad ۵(۳)=۱۵$

و چون $۱۵ \quad \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۵$$

مثال : نشان دهید که تابع $f(x)=۳+[x]$ در نقطه ی $x=۲$ حد ندارد.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(۳+[x])=۳+[۲^{+}]=۳+۲=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(۳+[x])=۳+[۲^{-}]=۳+۱=۴$

و چون $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ دارای حد نیست.

تمرین برای حل :

تمرین ۵) با محاسبه ی حد راست و حد چپ ، وجود حد تابع زیر در نقطه ی $x=۰$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰\\ ۵ & x=۰\end{cases}$$

مثال : مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در نقطه ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+x-۱ & x<۳\\ -۳x+۲ & x\geq ۳\end{cases}$$

حل : کافی است حد راست و حد چپ این تابع را در نقطه ی $x=۳$ محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}}(ax^{۲}+x-۱)=a(۳)^{۲}+(۳)-۱=۹a+۲$

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷\to ۹a=-۹\to a=-۱$$

تمرین برای حل :

تمرین ۶) مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه ی $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۳}-۲ & x>-۱\\ ۲ax^{۲} & x\leq -۱\end{cases}$$

تمرین ۷) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد.

***

در بحث مثلثات و نسبت های مثلثاتی زاویه ها با توابع مهمی ، تحت عنوان توابع مثلثاتی سروکار داریم.

شایسته است برای ادامه بحث ، بطور مختصر با این توابع آشنا شویم.

مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم

جدول الف)

زاویه						
	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

جدول ب)

زاویه						
	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱−	۰
cos		۱	۰	۱−	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = ۲\sin(۳۰^\circ) - \sqrt{۳}\tan(۶۰^\circ)$$

حل :

$$A = ۲\sin(۳۰^\circ) - \sqrt{۳}\tan(۶۰^\circ) = ۲(\frac{۱}{۲}) - \sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۱ - ۱ = ۰$$

تمرین برای حل :

تمرین ۸) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \sin ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ + \sqrt{۳}\sin^۲ ۴۵^\circ$$

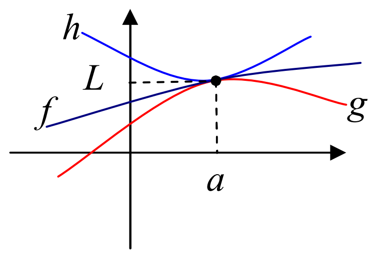
تمرین ۹) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} (۱ + \sqrt{۲}\sin x)$$

***

قضیه ی فشردگی

در صورتی که توابع f و g و h ، مانند شکل زیر طوری باشند که $g(x) \le f(x) \le h(x)$



در این صورت اگر $L \quad \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$ آنگاه نتیجه می شود که : $\lim_{x \to a} f(x) = L$

مثال : اگر $۳x^۲ + ۲ \le f(x) \le ۲\cos x$ ، حد تابع $f(x)$ را در نقطه ی $x = ۰$ محاسبه کنید.

حل :

$$\lim_{x \to ۰} (۳x^۲ + ۲) = ۳(۰)^۲ + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۰} (۲\cos x) = ۲\cos(۰) = ۲\times ۱ = ۲$$

پس طبق قضیه ی فشردگی می توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۲$$

تمرین برای حل :

تمرین ۱۰) با توجه به نامساوی زیر $\lim_{x\to ۳} f(x)$ را حساب کنید.

$$۱ + x^۲ \le f(x) \le ۴x - ۲$$

تمرین ۱۱) با توجه به نامساوی زیر $\lim_{x\to ۲} f(x)$ را حساب کنید.

$$۱ + ۳\sin(x - ۲) \le f(x) \le (x - ۱)^۲$$

به کمک قضیه ی فشردگی برای توابع مثلثاتی می توان نتایج زیر را به دست آورد.

$$\lim_{u\to ۰} \frac{\sin u}{u} = ۱ \quad و \quad \lim_{u\to ۰} \frac{u}{\sin u} = ۱$$

$$\lim_{u\to ۰} \frac{\tan u}{u} = ۱ \quad و \quad \lim_{u\to ۰} \frac{u}{\tan u} = ۱$$

از این نتایج برای محاسبه ی حد بسیاری از توابع مثلثاتی می توان استفاده کرد.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۵x}{۵x}$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۷x}$

۳) $\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x}{\sin x}$

۴) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۳ x}{x^۲ \tan x}$

۵) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin mx}{nx}$

۶) $\lim_{x\to ۰} \frac{۳x + \sin x}{x}$

حل :

۱) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۵x}{۵x} = ۱$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times\frac{۳}{۷}=۱\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}=۱\times۱=۱$$

۴)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۳} x}{x^{۲}\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{۲}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=۱\times۱\times۱=۱$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{m}{n}=۱\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{۳x}{x}+\frac{\sin x}{x})=۳+۱=۴$$

نتیجه : $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x}{۳x}+\frac{\sin ۴x}{۳x}=۱\times\frac{۴}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

توجه : در همه ی حد هایی که تاکنون در این قسمت بیان کردیم، متغیر به سمت صفر میل می کند. ولی در برخی موارد که متغیر به سمت عدد غیر صفر میل می کند، می توان از تغییر متغیر استفاده نمود.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sin(x+۲)}{۳x+۶}$$

حل : کافی است قرار دهیم $x+۲=t$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sin(x+۲)}{۳x+۶}=\lim_{x+۲\to ۰}\frac{\sin(x+۲)}{۳(x+۲)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۳t}\quad \lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{۱}{۳}=۱\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

تمرین برای حل :

تمرین ۱۲) حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{\tan(x+۱)\times \sin^{۲}(x+۱)}{۵(x+۱)^{۳}}$$

***

صفر حدی و صفر مطلق

برای درک مفهوم بعدی حد ، لازم است تفاوت صفر حدی و صفر مطلق را بدانیم.

صفر مطلق : همان عدد صفر است که مبدأ اعداد حقیقی است.

صفر حدی : عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر است.

بر این اساس

۱ : اگر مخرج کسری صفر مطلق باشد. این کسر تعریف نشده (نامعین) می باشد. برای مثال کسر $\frac{۵}{۰}$ نامعین است.

۲ : اگر مخرج کسری صفرحدی باشد. این کسر یک عدد بسیار بزرگ مثبت و یا بسیار بزرگ منفی خواهد شد. مانند :

الف) $\frac{۵}{۰^{+}}=+\infty$ ب) $\frac{۵}{۰^{-}}=-\infty$ ج) $\frac{-۵}{۰^{+}}=-\infty$ د) $\frac{-۵}{۰^{-}}=+\infty$

۳ : اگر صورت و مخرج کسری صفر مطلق باشد.آن کسر تعریف نشده است ولی اگر صورت و مخرج آن صفر حدی باشند، گویند حد مبهم است و قابل محاسبه می باشد. در ادامه به روش محاسبه ی این چنین حد هایی خواهیم پرداخت.

***

حدهای مبهم

گاهی در محاسبه ی حد توابع کسری با حالت صفر حدی بر روی صفر حدی[2] ($\frac{0}{0}$) برخورد می کنیم. در اصطلاح گفته می شود که حد مبهم است و مقدار آن روش جایگزینی مستقیم به دست نمی آید، بلکه باید قبل از جایگزینی عامل صفر کننده (عامل ابهام) را از صورت و مخرج حذف کنیم. این عمل را رفع ابهام گویند.

برای حذف عامل ابهام لازم است با توجه به نوع تابع یکی از روش های زیر را بکار بگیریم.

الف) اگر صورت و مخرج کسری، چند جمله ای باشند، صورت و مخرج را تجزیه کنید و سپس کسر را ساده کنید[3].

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\frac{(۲)^{۲}-۴}{۳(۲)-۶}=\frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{۳}=\frac{۲+۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}$$

حل:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}=\frac{(-۲)^{۲}+۶(-۲)+۸}{(-۲)^{۲}-۴}=\frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴}=\frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

---

2 . عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر ، را صفر حدی می نامند.

3 . در صورتی که تجزیه ی صورت یا مخرج کسر مشکل باشد، می توان از تقسیم صورت یا مخرج بر عامل صفر کننده استفاده نمود.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲} = \frac{۲}{-۴} = \frac{۱}{-۲}$$

ب) اگر صورت یا مخرج کسری شامل رادیکال با فرجه‌ی ۲ باشند، صورت یا مخرج را گویا کنید. برای گویا کردن، معمولاً صورت یا مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \frac{۲(۹)-۱۸}{\sqrt{۹}-۳} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} \times \frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{(\sqrt{x})^۲-(۳)^۲} \times (\sqrt{x}+۳)$$

$$= \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{x-۹} \times (\sqrt{x}+۳) = \lim_{x\to ۹} ۲(\sqrt{x}+۳) = ۲(\sqrt{۹}+۳) = ۱۲$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲} = \frac{\sqrt{(۲)^۲+۵}-۳}{(۲)-۲} = \frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲} \times \frac{\sqrt{x^۲+۵}+۳}{\sqrt{x^۲+۵}+۳} = \lim_{x\to ۲} \frac{(\sqrt{x^۲+۵})^۲-(۳)^۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ + ۵ - ۹}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۵}+۳} = \frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^۲+۵}+۳} = \frac{۴}{۳+۳} = \frac{۲}{۳}$$

تمرین برای حل :

تمرین ۱۳) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x - ۱}$

ب) $\lim_{x \to -۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ + ۵x + ۶}$

ج) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{۲ - \sqrt{x+۳}}$

د) $\lim_{x \to ۰} \frac{۳\sin x + ۲\tan x}{۵x}$

تمرین ۱۴) مقدار a را طوری بیابید که $\lim_{x \to a} \frac{x^۲ - a^۲}{x - a} = ۸$ باشد.

***

حد بی نهایت

گاهی وقتی متغیر x به عدد a (از دو طرف یا از یک طرف) میل کند، مقدار $f(x)$ بی انتها (بی نهایت) می شود. در این حالت گوییم با حد بی نهایت سروکار داریم. این حالت اغلب وقتی پیش می آید که صورت کسر عدد غیر صفر ولی مخرج آن صفر حدی باشد. مانند حالت های زیر :

$$\frac{۲}{۰^+} = +\infty \quad و \quad \frac{۲}{۰^-} = -\infty \quad و \quad \frac{-۲}{۰^+} = -\infty \quad و \quad \frac{-۲}{۰^-} = +\infty$$

توجه کنید، همانطور که قبلاً نیز اشاره گردید، در حالتی که صورت کسر عدد غیر صفر ولی مخرج آن صفر مطلق باشد، آن کسر نامعین است.

$$\frac{۲}{۰} = \text{تعریف نشده (نامعین)}$$

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{۵}{x-۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{۵}{x-۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{-۵}{x-۲}$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{-۵}{x-۲}$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۷}{x-۳}$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۵^+}\frac{x-۲}{[x]-۵}$$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^+-۲}=\frac{۵}{۰^+}\quad +\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^--۲}=\frac{۵}{۰^-}\quad -\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^+-۲}=\frac{-۵}{۰^+}=-\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^--۲}=\frac{-۵}{۰^-}=+\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۷}{x-۳}=\frac{۳-۷}{۳^+-۳}=\frac{-۴}{۰^+}=-\infty$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۵^+}\frac{x-۲}{[x]-۵}=\frac{۵-۲}{[۵^+]-۵}=\frac{۳}{۵-۵}=\frac{۳}{۰}$$ نامعین(مخرج صفر مطلق است)

تمرین برای حل :

تمرین ۱۵) مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]-۱}{x-[x]}$$

تمرین۱۶) مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۱}{x-۲}$$

حد در بی نهایت

گاهی لازم است مقدار متغیر x را به سمت بی نهایت (بی انتها) میل کند. در این حالت گویند با حد در بینهایت سروکار داریم. برای محاسبه ی چنین حد هایی از الگو های زیر استفاده می کنیم.

۱) حد یک جمله ای غیر ثابت

در این حد حاصل بی نهایت می شود، ولی توجه به توان و علامت ضریب x مهم است.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}(-۲x^{۳})=-۲(+\infty)^{۳}=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to-\infty}(۳x^{۴})=۳(-\infty)^{۴}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty}(-۵x^{۳})=-۵(-\infty)^{۳}=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to-\infty}(-۲x^{۳})=-۲(+\infty)^{۳}=-\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to\pm\infty}(-۳x^{۲})=-۳(\pm\infty)^{۲}=-\infty$$

توجه داشته باشید، این نحوه ی نوشتن از نظر ریاضی ایراد دارد، ولی برای تعیین علامت حاصل لازم است.

۲) حد چند جمله ای

به سادگی و با توجه به نکته زیر می توان از طریق فاکتورگیری ، حد را محاسبه کرد. برای مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}(-۵x^{۷}+۳x^{۴}-۲)=\lim_{x\to+\infty}-۵x^{۷}(۱+\frac{۳x^{۴}}{-۵x^{۷}}-\frac{۲}{-۵x^{۷}})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-۵x^{۷}(۱+\frac{۳}{-۵x^{۳}}-\frac{۲}{-۵x^{۷}})=\lim_{x\to+\infty}-۵x^{۷}(۱+۰+۰)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-۵x^{۷}=-۵(+\infty)^{۷}=-\infty$$

توجه داشته باشید، در حالت کسری، اگر صورت کسر عدد غیر صفر و مخرج کسر بینهایت شود، آن کسر بسیار بسیار کوچک (صفر حدی) می باشد. مانند حالت های زیر:

$$\frac{۲}{+\infty}=۰ \quad و \quad \frac{۲}{-\infty}=۰ \quad و \quad \frac{-۲}{+\infty}=۰ \quad و \quad \frac{-۲}{-\infty}=۰$$

همچنین بدیهی است که $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{bx^{n}}=۰$

مثال : حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-۲}{۵x^{۳}}= \qquad ۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳}{۵x^{۲}}=$$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-۲}{۵x^{۳}}=\frac{-۲}{۵(-\infty)^{۳}}=\frac{-۲}{-\infty}=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳}{۵x^{۲}}=\frac{-۳}{۵(+\infty)^{۲}}=\frac{-۳}{+\infty}=۰$$

در حد توابع چند جمله ای، با توجه به روش فاکتورگیری نتیجه می شود، که حد تابع چند جمله ای ، با حد جمله ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. منبعد در یک چند جمله ای ، جمله ای که دارای بیشترین توان باشد، را جمله ی ارشد نام گذاری می کنیم.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}(-۵x^{۷}+۳x^{۴}-۲)=\lim_{x\to+\infty}-۵x^{۷}=-۵(+\infty)^{۷}=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}(۳x-۴x^{۲}-۷)=\lim_{x\to+\infty}-۴x^{۲}=-۴(+\infty)^{۲}=-\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty}(۳x+۵x^{۲}+x^{۳}-x^{۳}-۲)=\lim_{x\to-\infty}-x^{۳}=-(-\infty)^{۳}=+\infty$$

۳) حد تابع کسری

برای تعیین حد توابع کسری[4]، مانند توابع چند جمله ای ، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می کنیم.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۳}+۷x-۲}{۵-۳x^{۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۳}}{-۳x^{۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-۳}=-\frac{۱}{۳}(-\infty)=+\infty$$

[4] . تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{۴-۵x^{۲}+۷x}{۲x^{۲}+۳x+۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-۵x^{۲}}{۲x^{۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-۵}{۲} = \frac{-۵}{۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^{۳}-۲}{۵x-۳x^{۴}+۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^{۳}}{-۳x^{۴}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲}{-۳x} = \frac{۲}{-۳(-\infty)} = ۰$$

$$۴)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^{۳}+۷x+۱}{x-۳x^{۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^{۳}}{-۳x^{۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{-۳} = -\frac{۴}{۳}(+\infty) = -\infty$$

نتیجه می شود که در محاسبه ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.

الف) توان جمله ی ارشد صورت از توان جمله ی ارشد مخرج ، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت می شود. مانند مثال های ۱ و ۴ فوق

ب) توان جمله ی ارشد صورت از توان جمله ی ارشد مخرج ، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می شود. مانند مثال ۳ فوق

ج) توان جمله ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت ضریب های جملات ارشد می شود. مانند مثال ۲ فوق

۴) حد تابع رادیکالی با فرجه ی ۲ (اصم)

در حد توابع رادیکالی با فرجه ی ۲ ، با توجه به روش فاکتورگیری هم ارزی های زیر حاصل می شود. این هم ارزی ها را هم ارزی های نیوتن می نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را هم ارز گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{ax^{۲}+bx+c} \equiv \lim_{x\to+\infty} \sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{ax^{۲}+bx+c} \equiv -\lim_{x\to\infty} \sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

مثال: های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{۴x^{۲}-۷x+۱} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{۴}(x+\frac{-۷}{۲(۴)}) = \lim_{x\to+\infty} ۲x = ۲(+\infty) = +\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{۹x^{۲}-x+۱}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{۹}(x+\frac{-۱}{۲(۹)})=-\lim_{x\to-\infty}۳x=-۳(-\infty)=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{۹x^{۲}+۷}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{۹}(x+\frac{۰}{۲(۹)})=-\lim_{x\to-\infty}۳x=-۳(-\infty)=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۱}(x+\frac{-۱}{۲(۱)})=\lim_{x\to-\infty}x\quad+\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{-۴x^{۲}+۵x+۳}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{-۴}(x+\frac{۵}{۲(-۴)})=\text{حد ندارد.}$$

تمرین برای حل : حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱۷)\ \lim_{x\to-\infty}(۵x-۹x^{۴}-x+۱)$$

$$۱۸)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+۲x^{۳}-۲}{۵x-۳x^{۴}+۱}$$

$$۱۹)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}+۳xx-۱}-x+۵)=$$

$$۲۰)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+\sqrt{۹x^{۲}-x}}{۵-۶x}=$$

$$۲۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۴x^{۲}+۵x}-۷x}{۶x-\sqrt{۹x^{۲}+۵}}=$$

$$۲۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-\sqrt{x^{۲}+۷x-۱}}{۵x+\sqrt{x^{۲}+x-۲}}=$$

$$۲۳)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x^{۲}+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=$$

تمرین ۲۴) حد های زیر را حساب کنید.

ب) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۲x+۵}-\sqrt{x^{۲}+۲x+۷})$

الف) $\lim_{x\to۱}\frac{x^{۲}-۱}{-۲+\sqrt{x+۳}}$

تمرین ۲۵) حد های زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^{۳}-۸x}{۳x+۵}$

الف) $\lim_{x\to۳^{-}}\frac{x+۲}{۲x-۶}$

تمرین ۲۶) مقدار k را به قسمی تعیین کنید که حد تابع $f(x)=\dfrac{۲x^{۴}+x^{۳}-۱}{kx^{۴}+x^{۲}+۱}$ وقتی که $x \to +\infty$ برابر۴ باشد.

تمرین ۲۷) مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{mx^{۲}-۵}{۲x^{n}-۳x-۲}=۱$

***

پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه ی $x=a$ پیوسته گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه ی $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) تابع در نقطه ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

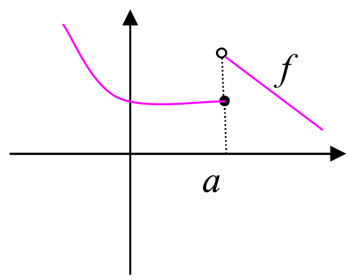
ج) حد تابع در این نقطه با مقدار آن برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

به عبارتی دیگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است، هرگاه

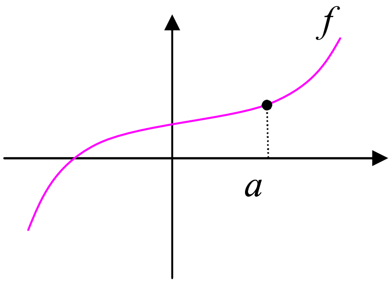
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

اگر یکی از شرط های فوق برقرار نباشد، گویند تابع در $x=a$ پیوسته نیست.

از نظر شهودی پیوستگی تابع در نقطه ی $x=a$ بدین معنی است که نمودار تـابع در ایـن نقطـه پـرش یـا بریدگی نداشته باشد. به نمودار های زیر توجه کنید.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{(۱)^۲+۳}=۲$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x-۵)=۲(۱)-۵=-۳$$ حد چپ

مقدار $f(۱)=۵$

لذا تابع در نقطه ی $x=۱$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\le ۲ \\ ۳x-۱ & x>۲ \end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(x^{۲}+۱)=(۲)^{۲}+۱=۵$

مقدار $f(۲)=(۲)^{۲}+۱=۵$

لذا تابع در نقطه ی $x=۲$ پیوسته است.

مثال: تابع زیر در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax^{۲}+۵ & x\ge ۱ \\ ۶x-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(۲ax^{۲}+۵x)=۲a(۱)^{۲}+۵(۱)=۲a+۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(۶x-۳)=۶(۱)-۳=۳$

مقدار $f(۱)=۲a(۱)^{۲}+۵(۱)=۲a+۵$

و چون تابع در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است، پس :

$$۲a+۵=۳\to ۲a=۳-۵\to ۲a=-۲\to a=-۱$$

تمرین برای حل :

تمرین ۲۸) پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x<۲ \\ x+۵ & x=۲ \\ ۹-x & x>۲ \end{cases}$$

تمرین ۲۹) پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۵$ بررسی کنید.

$$f(x)=۱+۲\,[x]$$

تمرین ۳۰) پیوستگی تابع علامت را در نقطه ی $x=۰$ بررسی کنید.

تمرین ۳۱) نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ی $x=۱$ پیوسته باشد ولی در نقطه ی $x=-۱$ پیوسته نباشد.

تمرین۳۲) مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه ی $x=-۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x<۲ \\ ۵ & x=۲ \\ ۲bx-۳ & x>۲ \end{cases}$$

***

توابع پیوسته

تابع f را تابع پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط دامنه ی خود پیوسته[1] باشد.

در این صورت

الف : هر تابع چند جمله ای در تمام نقاط پیوسته است.

ب : تابع ثابت و تابع همانی در تمام نقاط پیوسته هستند.

ج : تابع کسری وقتی همواره پیوسته است، هرگاه مخرج آن ریشه نداشته باشد.

مثال : نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

$$f(x)=\frac{۳x-۵}{x^۲-۴x}$$

[1] . به عبارتی دیگر نمودار تابع در تمام نقاط پرش یا بریدگی نداشته باشد.

حل : کافی است ریشه های مخرج تابع را تعیین کنیم.

$$x^{۲} - ۴x = ۰ \rightarrow x(x-۴) = ۰ \rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۴$$

تمرین برای حل :

تمرین ۳۳) نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

$$f(x) = \frac{۵}{x^{۳} - ۴x}$$

تمرین۳۴) ثابت کنید که تابع $f(x) = \dfrac{x+۲}{x^{۲}+۵}$ همواره پیوسته است.

***

***

فصل سوّم

مشتق و کاربرد آن

یکی دیگر از مفاهیم اساسی و کاربردی ریاضی ، مفهوم مشتق تابع است. در ایـن فـصل عـلاوه بـر معرفـی مفهوم مشتق و روشهای مشتق گیری ، تعدادی از کاربرد های آن را نیز معرفی می کنیم.

***

مشتق تابع در یک نقطه

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x=a$ ، پیوسته باشد. مشتق تابع در این نقطه به صورت زیر تعریف می شود.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=۳x-۷$ را در نقطه ی $x=۲$ بدست آورید.

حل :

$$f(x)=۳x-۷$$

$$f(۲)=۳(۲)-۷=-۱$$

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۳x-۷)-(-۱)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-۶}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳(x-۲)}{x-۲}=۳$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^۲+۳x-۱$ را در نقطه ی $x=۴$ بدست آورید.

حل :

$$f(x)=x^۲+۳x-۱$$

$$f(۴)=(۴)^۲+۳(۴)-۱=۱۶+۱۲-۱=۲۷$$

$$f'(۴) = \lim_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$$

$$= \lim_{x \to ۴} \frac{(x^۲ + ۳x - ۱) - (۲۷)}{x - ۴} = \lim_{x \to ۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۲۸}{x - ۴} = \lim_{x \to ۴} \frac{(x + ۷)(x - ۴)}{x - ۴}$$

$$= \lim_{x \to ۴} (x + ۷) = ۴ + ۷ = ۱۱$$

تمرین برای حل :

تمرین ۱) مشتق هر یک از توابع زیر را به کمک تعریف مشتق، در نقطه ی داده شده ، بدست آورید.

الف) $f(x) = -۵x + ۱ \quad ; \quad x = ۲$

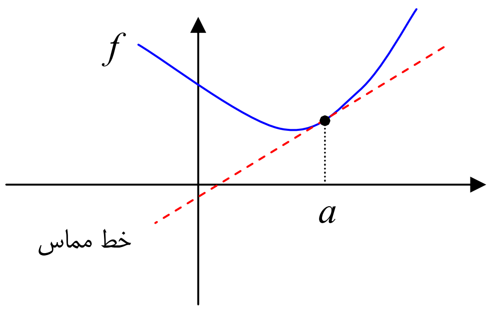
ب) $f(x) = -x^۲ + ۳x \quad ; \quad x = ۱$

***

تعبیر هندسی مشتق

مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ی $x = a$، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.

$$m = f'(a)$$



مثال: شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ را در نقطه ی $x = ۳$ بدست آورید.

حل :

$f(x) = x^۲ + ۱$

$f(۳) = (۳)^۲ + ۱ = ۱۰$

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{(x^۲ + ۱) - (۱۰)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x - ۳)(x + ۳)}{x - ۳}$$

$$= \lim_{x \to ۳} (x + ۳) = ۳ + ۳ = ۶$$

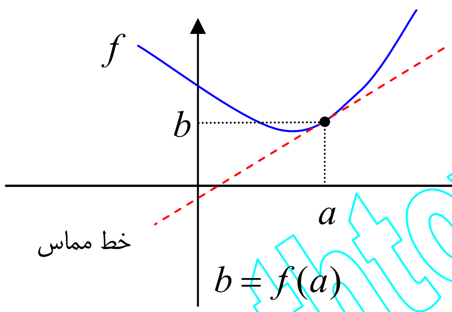
شیب خط مماس $m = f'(۳) = ۶$

***

معادله ی خط مماس

معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه ی $x = a$ از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$y = m(x - a) + b$$



مثال : با توجه به مثال قبل ، معادله ی خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه ی $x = ۳$ را به دست آورید.

حل :

$f(۳) = (۳)^۲ + ۱ = ۱۰$

معادله ی خط مماس $y = m(x - a) + b \to y = ۶(x - ۳) + ۱۰ \to y = ۶x - ۸$

تمرین برای حل :

تمرین۲) معادله ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را در نقطه ی $x = ۳$ بدست آورید.

***

تابع مشتق

اگر $y=f(x)$ تابعی باشد که در تمام نقاط دامنه ، مشتق پذیر باشد. در این صورت متناظر آن تابع دیگری تحت عنوان تابع مشتق (مشتق اوّل) به صورت زیر تعریف می شود.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تابع مشتق را به اختصار **مشتق** تابع می نامیم و آن را به صورت $f'(x)$ یا y' یا $\frac{df}{dx}$ نمایش می دهیم.

مثال: مشتق تابع $f(x)=۳x+۱$ را به دست آورید.

حل :

$$f(x+h)=۳(x+h)+۱=۳x+۳h+۱$$

$$f(x+h)-f(x)=(۳x+۳h+۱)-(۳x+۱)=۳h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳h}{h}=۳$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^۲-۴x+۱$ را به دست آورید.

حل :

$$f(x+h)=(x+h)^۲-۴(x+h)+۱=x^۲+۲xh+h^۲-۴x-۴h+۱$$

$$f(x+h)-f(x)=(x^۲+۲xh+h^۲-۴x-۴h+۱)-(x^۲-۴x+۱)$$

$$=۲xh+h^۲-۴h=h(۲x+h-۴)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h-۴)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}(۲x+h-۴)=۲x+۰-۴=۲x-۴$$

تمرین برای حل : به کمک تعریف تابع مشتق، مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۳) $f(x) = -۵x + ۷$

۴) $f(x) = x^{۲} - ۳x$

۵) $f(x) = \sqrt{x}$

۶) $f(x) = \frac{۱}{x}$

***

فرمول های مشتق گیری از توابع

استفاده از تعریف تابع مشتق ، برای تعیین مشتق یک تابع ، قدری طولانی و گاهی مشکل است. لذا در ادامه فرمول های مشتق گیری از توابع را برای سهولت کار مشتق گیری بیان می کنیم.

الف) فرمول های مقدماتی مشتق

مشتق تابع ثابت

۱) $f(x) = a \rightarrow f'(x) = ۰$

یعنی مشتق هر تابع ثابت (عدد ثابت) برابر صفر است.

مثال :

$$f(x) = \frac{۲}{۳} \rightarrow f'(x) = ۰$$

***

مشتق تابع یک جمله ای درجه ی اوّل

۲) $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$

یعنی مشتق هر تابع یک جمله ای درجه ی اوّل برابر ضریب x است.

مثال :

$$f(x) = ۳x \rightarrow f'(x) = ۳$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = ۱$$

***

مشتق تابع یک جمله ای

$۳)\ f(x)=ax^n \rightarrow f'(x)=anx^{n-۱}$

مثال :

$f(x)=۳x^۵ \rightarrow f'(x)=۳\times ۵x^۴=۱۵x^۴$

مشتق تابع کسری

$۴)\ f(x)=\frac{۱}{x} \rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$

مشتق تابع رادیکالی

$۵)\ f(x)=\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$۶)\ f(x)=\sqrt[n]{x^m} \rightarrow f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

مثال :

$f(x)=\sqrt[۵]{x^۲} \rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۵\sqrt[۵]{x^۳}}$

***

مشتق توابع نمایی

$۷)\ f(x)=a^x \rightarrow f'(x)=a^x\ L_n a$

مثال :

$f(x)=۳^x \rightarrow f'(x)=۳^x\ L_n ۳$

$۸)\ f(x)=e^x \rightarrow f'(x)=e^x$

مشتق توابع لگاریتمی

$۹)\ f(x)=\log_a^x \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}\times\frac{۱}{L_n a}$

مثال :

$$f(x)=\log_{۵}^{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}\times\frac{۱}{L_n ۵}$$

$$۱۰)\ f(x)=L_n x \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}$$

مشتق توابع مثلثاتی

$$۱۱)\ f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$۱۲)\ f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$۱۳)\ f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=۱+\tan^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$$

$$۱۴)\ f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-(۱+\cot^{۲} x)=-\frac{۱}{\sin^{۲} x}$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$۱۵)\ f(x)=\sin^{-۱} x \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$۱۶)\ f(x)=\cos^{-۱} x \rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$۱۷)\ f(x)=\tan^{-۱} x \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

$$۱۸)\ f(x)=\cot^{-۱} x \rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$$

***

ب) فرمول های تکمیلی مشتق

اگر u و v و w توابعی مشتق پذیر برحسب x باشند، در این صورت می توان فرمول های زیر را برای مشتق بیان کرد.

مشتق حاصل ضرب یک عدد در یک تابع

۱) $y = au \rightarrow y' = au'$

یعنی مشتق حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در مشتق تابع برابر است.

مثال :

$$y = ۵\sqrt{x} \rightarrow y' = ۵ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۵}{۲\sqrt{x}}$$

$$y = -۳\sin x \rightarrow y' = -۳\cos x$$

***

مشتق مجموع دو یا چند تابع

۲) $y = u + v \rightarrow y' = u' + v'$

۳) $y = u + v + w + \ldots \rightarrow y' = u' + v' + w' + \ldots$

مشتق مجموع دو یا چند تابع با مجموع مشتق های هر یک از آنها برابر است.

مثال :

$$y = ۵x + \sin x \rightarrow y' = ۵ + \cos x$$

$$y = x^{۲} + ۳\cos x + \sqrt{x} + ۵ \rightarrow y' = ۲x - ۳\sin x + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

***

مشتق حاصل ضرب دو یا چند تابع

۴) $y = u.v \rightarrow y' = u'.v + v'.u$

۵) $y = u.v.w \rightarrow y' = u'.v.w + v'.u.w + w'.u.v$

مثال :

$$y = (۳x^{۲} + ۵x)(\cos x) \rightarrow y' = (۶x + ۵)(\cos x) + (۳x^{۲} + ۵x)(-\sin x)$$

$$y = (۳x^{۲} + ۱)(۵e^{x})(\sin x)$$

$$\rightarrow y' = (۶x)(۵e^{x})(\sin x) + (۵e^{x})(۳x^{۲} + ۱)(\sin x) + (\cos x)(۳x^{۲} + ۵x)(۵e^{x})$$

مشتق تابع تواندار

۶) $y = a.u^{n} \rightarrow y' = a.n.u'.u^{n-۱}$

مثال :

$$y = ۵(۳x^{۲} + \cos x)^{۳} \rightarrow y' = ۵(۳)(۶x - \sin x)(۳x^{۲} + \cos x)^{۲}$$

$$y = ۳\sin^{۴} x \rightarrow y' = ۱۲(\cos x)(\sin^{۳} x)$$

***

مشتق خارج قسمت دو تابع

۷) $y = \dfrac{u}{v} \rightarrow y' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^{۲}}$

مثال :

$$y = \frac{۳x^{۲} - ۵x}{۴x + e^{x}} \rightarrow y' = \frac{(۶x + ۵)(۴x + e^{x}) - (۴ + e^{x})(۳x^{۲} - ۵x)}{(۴x + e^{x})^{۲}}$$

۸) $y = \dfrac{۱}{v} \rightarrow y' = \dfrac{-v'}{v^{۲}}$

مثال :

$$y = \frac{۱}{۳ + \tan x} \rightarrow y' = \frac{-(۱ + \tan^{۲} x)}{(۳ + \tan x)^{۲}}$$

***

مشتق توابع رادیکالی

۹) $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

مثال :

$$y = \sqrt{e^{t} + \sin t} \rightarrow y' = \frac{e^{t} + \cos t}{۲\sqrt{e^{t} + \sin t}}$$

$$۱۰)\ y=\sqrt[m]{u^n} \rightarrow y'=\frac{n.u'}{۲\sqrt[m]{u^{n-m}}}$$

مثال :

$$y=\sqrt[۵]{(۶x+x^۲-۱)^۲} \rightarrow y'=\frac{۲(۶+۲x)}{۵\sqrt[۵]{(۶x+x^۲-۱)^۳}}$$

$$y=\sqrt[۴]{\sin x+\cos x} \rightarrow y=\sqrt[۴]{(\sin x+\cos x)^۱} \rightarrow y'=\frac{\cos x-\sin x}{۴\sqrt[۴]{(\sin x+\cos x)^۳}}$$

***

مشتق توابع نمایی

$$۱۱)\ y=a^u \rightarrow y'=u'.a^u.L_n a$$

$$۱۲)\ y=e^u \rightarrow y'=u'.e^u$$

مثال :

$$y=۵^{\sin x} \rightarrow y'=(\cos x).۵^{\sin x}.L_n ۵$$

$$y=e^{\sqrt{x}} \rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}$$

***

مشتق توابع لگاریتمی

$$۱۳)\ y=\log_a^u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}\times\frac{۱}{L_n a}$$

$$۱۴)\ y=L_n u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

مثال:

$$y=\log_۵^{\sin x} \rightarrow y'=\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{۱}{L_n ۵}$$

$$y=L_n(۳x^۲+۵x+۱) \rightarrow y'=\frac{۶x+۵}{۳x^۲+۵x+۱}$$

مشتق توابع مثلثاتی

۱۵) $y=\sin u \rightarrow y'=u'.\cos u$

۱۶) $y=\cos u \rightarrow y'=-u'.\sin u$

۱۷) $y=\tan u \rightarrow y'=u'(۱+\tan^{۲} u)=\dfrac{u'}{\cos^{۲} u}$

۱۸) $f(x)=\cot u \rightarrow y'=-u'(۱+\cot^{۲} u)=\dfrac{-u'}{\sin^{۲} u}$

مثال :

$y=\tan e^{x} \rightarrow y'=e^{x}(۱+\tan^{۲} x)$

$y=\cos\sqrt{x} \rightarrow y'=-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sin^{۲}\sqrt{x})$

با توجه به آنچه که در مورد مشتق توابع توان‌دار، گفته شد، می توان مشتق توابع مثلثاتی توان‌دار را به شکل زیر بدست آورد.

$y' =$ (کم کردن یک واحد از توان)(مشتق نسبت مثلثاتی)(مشتق زاویه)(توان)(ضریب تابع)

مثال:

$y=۵\sin^{۷}\sqrt{x} \rightarrow y'=۵(۷)(\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}})(\cos\sqrt{x})(\sin^{۶}\sqrt{x})$

***

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

۱۹) $y=\sin^{-۱} u \rightarrow y'=\dfrac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$

۲۰) $y=\cos^{-۱} u \rightarrow y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$

۲۱) $y=\tan^{-۱} u \rightarrow y'=\dfrac{u'}{۱+u^{۲}}$

۲۲) $y = \cot^{-۱} u \to y' = \dfrac{-u'}{۱ + u^{۲}}$

مثال :

$$y = \sin^{-۱}(۵x^{۳}) \to f'(x) = \frac{۱۵x^{۲}}{\sqrt{۱ - (۵x^{۳})^{۲}}}$$

$$y = \tan^{-۱}(۳x + e^{x}) \to y' = \frac{۳ + e^{x}}{۱ + (۳x + e^{x})^{۲}}$$

***

تمرین برای حل : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۷) $y = ۳\sin x + \sqrt{x} + ۵e^{x} - ۲$

۸) $y = x^{۲} \sin x$

۹) $y = \dfrac{۲x + \sin x}{\cos x}$

۱۰) $y = (x^{۲} + ۳x)^{۵}$

۱۱) $y = ۵^{(۳x^{۲} + \sqrt{x})}$

۱۲) $y = \log_{۳}^{۶x + \sin x}$

۱۳) $y = L_{n}(۲x + x^{۳})$

۱۴) $y = \sin(\cos x)$

۱۵) $y = \cos^{۲} e^{x}$

۱۶) $y = \cos^{۵}(\dfrac{۱}{x})$

۱۷) $y = ۵\tan^{۳}(e^{x})$

۱۸) $y = ۳\cot^{۷} x$

۱۹) $y = ۳\tan^{۵} \sqrt{x}$

۲۰) $y = \sin^{-۱}(۳x)$

***

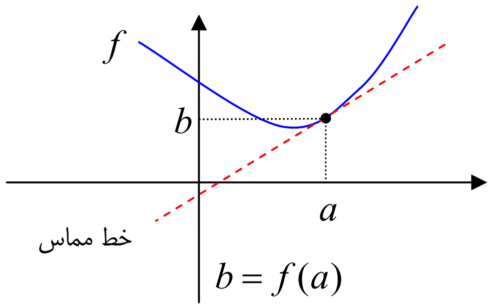
در ادامه کاربرد هایی از مشتق را بیان می کنیم.

معادله ی خط مماس بر منحنی

همانطور که قبلاً اشاره شد، شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه ی $x = a$ واقع بر منحنی را به کمک مشتق می توان تعیین کرد. معادله ی خط مماس نیز از فرمول زیر بدست می آید.

شیب خط مماس $m = f'(a)$

معادله ی خط مماس $y = m(x-a) + b$



مثال : معادله ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x) = 2 + \sin x$ در نقطه ی $x = 0$ را بدست آورید.

حل :

$$x = 0 \xrightarrow{f(x)=1+\sin x} f(0) = 2 + \sin(0) = 2 + 0 = 2$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow m = f'(0) = \cos(0) = 1 \quad \text{شیب خط مماس}$$

$$y = 3(x-a) + b \rightarrow y = 1(x-0) + 2 \rightarrow y = x + 2 \quad \text{معادله ی خط مماس}$$

تمرین برای حل :

تمرین۲۱) مشتق تابع $f(x) = 5e^{3x-6}$ را در نقطه ی $x = 2$ به دست آورید.

تمرین۲۲) مشتق تابع $f(x) = 2\sin \pi x$ را در نقطه ی $x = 0$ به دست آورید.

تمرین۲۳) مشتق تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ را در نقطه ی $x = 5$ به دست آورید.

تمرین۲۴) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در نقطه‌ی $x = 1$ به دست آورید.

تمرین۲۵) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = e^{2x+6}$ را در نقطه‌ی $x = -3$ به دست آورید.

***

قاعده ی هوپیتال

یک روش ساده برای رفع ابهام حد هایی که به شکل $(\frac{\cdot}{\cdot})$ در می آیند، قاعده ی هوپیتال است. برای استفاده از قاعده ی هوپیتال کافی است از صورت و مخرج کسر به صورت جداگانه مشتق گرفتـه و سـپس حـد تـابع جدید را بدست آورد. توجه داشته باشید که اگر حد تابع جدید باز به شکل $(\frac{\cdot}{\cdot})$ در آمـد، قاعـده ی هوپیتـال را روی تابع جدید تکرار کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+x-۶} \underset{Hop}{\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}} \lim_{x\to ۲} \frac{۲x}{۲x+۱} = \frac{۲(۲)}{۲(۲)+۱} = \frac{۴}{۵}$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to \cdot} \frac{۱-e^{x}}{۵\sin x}$$

حل:

$$\lim_{x\to \cdot} \frac{۱-e^{x}}{۵\sin x} \underset{Hop}{\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}} \lim_{x\to \cdot} \frac{-e^{x}}{۵\cos x} = \frac{-e^{(\cdot)}}{۵\cos(\cdot)} = \frac{-۱}{۵(۱)} = \frac{-۱}{۵}$$

مثال : حد $\lim_{x\to \cdot} \frac{x^{۲}}{۱-\cos x}$ را حساب کنید.

حل :

$$\lim_{x\to \cdot} \frac{x^{۲}}{۱-\cos x} \underset{Hop}{\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}} \lim_{x\to \cdot} \frac{۲x}{\sin x} \underset{Hop}{\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}} \lim_{x\to \cdot} \frac{۲}{\cos x} = \frac{۲}{\cos(\cdot)} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

۲۶) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۴-\sqrt{۵x+۱}}{x^۲-۹}$

۲۷) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{e^{\sin x}+\cos x}{\sin ۲x}$

۲۸) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{L_n(x^۲-۳)}{x^۲-۲x}$

۲۹) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-x+\sin x}{x^۲}$

***

نقطه ی بحرانی تابع

هر نقطه از دامنه ی تابع را نقطه ی بحرانی می نامند، هرگاه یکی از شرایط زیر را داشته باشد.

الف) مشتق تابع در این نقطه صفر باشد.

ب) مشتق تابع در این نقطه وجود نداشته باشد.

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۳-۳x$ را به دست آورید.

حل : دامنه ی این تابع مجموعه ی اعداد حقیقی است. $D_f=R$

$$f'(x)=۳x^۲-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^۲-۳=۰\to ۳x^۲=۳\to x^۲=۱\to x=۱\ ,\ x=-۱$$

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=L_n(x^۲-۱)$ را به دست آورید.

حل : ابتدا دامنه ی این تابع را تعیین می کنیم.

$$x^۲-۱>۰\to x^۲>۱\to x<-۱\ or\ x>۱$$

$$D_f=R-[-۱,۱]$$

حال مشتق تابع را محاسبه می کنیم.

$$f'(x)=\frac{۲x}{x^۲-۱}$$

اکنون ریشه های صورت و مخرج تابع مشتق را تعیین می کنیم. ریشه های صورت ، نقاطی را بدست آورد که در آنها مشتق صفر باشد. ریشه های مخرج ، نقاطی را بدست آورد که در آنها تابع مشتق ناپذیر باشد.

$$۲x=۰\to x=۰$$

$x^{۲}-۱=۰ \rightarrow x^{۲}=۱ \rightarrow x=۱ \;,\; x=-۱$

چون نقطه ی $x=۰$ عضو دامنه نیست، لذا این نقطه بحرانی نمی باشد.

تمرین برای حل :

تمرین۳۰) نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=L_n(۱-x^{۲})$ را به دست آورید.

تمرین۳۱) نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ را به دست آورید.

تمرین۳۲) نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$ را به دست آورید.

***

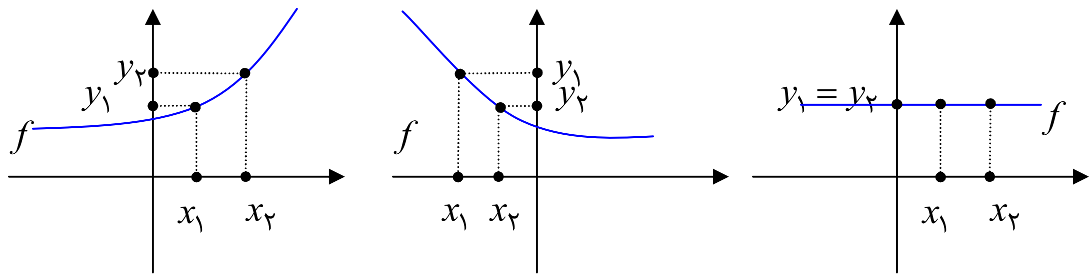
تابع صعودی و تابع نزولی و نقاط بیشنیه و کمینه تابع

اگر در صفحه ی محور های مختصات ، نقطه ای روی نمودار تابع پیوسته باشد و با توجه به محور طول ها حرکت از چپ به راست داشته باشد (مقادیر طول ها افزایش یابند). در این صورت سه حالت زیر رخ می دهد.

الف) مقادیر عرض های نقاط افزایش می یابند. در این صورت تابع را صعودی اکید می نامند.

ب) مقادیر عرض های نقاط کاهش می یابند. در این صورت تابع را نزولی اکید می نامند.

ج) مقادیر عرض های نقاط ثابت می مانند. در این حالت تابع ثابت است.



$x_۱<x_۲ \rightarrow y_۱<y_۲$ — تابع صعودی اکید

$x_۱<x_۲ \rightarrow y_۱>y_۲$ — تابع نزولی اکید

$x_۱<x_۲ \rightarrow y_۱=y_۲$ — تابع ثابت

به کمک تابع مشتق، می توان صعودی یا نزولی بودن نمودار تابع را تعیین کرد. بدین صورت است که :

الف) در هر فاصله که $f'(x)>۰$ باشد، تابع صعودی اکید است.

ب) در هر فاصله که $f'(x)<۰$ باشد، تابع نزولی اکید است.

ج) در هر فاصله که $f'(x)=۰$ باشد، تابع ثابت است.

لذا برای تعیین صعودی یا نزولی بودن توابع کافی است، مشتق تابع را بدست آورده و تعیین علامت کنیم. سپس جدولی را که در آن علامت مشتق مشخص شده باشد را تشکیل دهیم. چنین جدولی را جدول تغییرات یا جدول رفتار تابع می نامند.

x	$-\infty$	ریشه های مشتق	$+\infty$
y'		علامت مشتق	
y			

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x)=x^۲+۴x$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x)=۲x+۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x+۴=۰ \rightarrow x=-۲$$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۴	$\nearrow$	$+\infty$

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x)=-x^۲+۲x$ را رسم کنید.

حل :

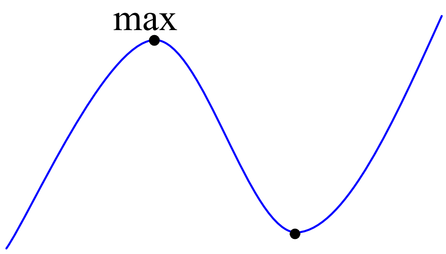
$$f'(x)=-۲x+۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۲x+۲=۰ \rightarrow x=۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱	$\searrow$	$-\infty$

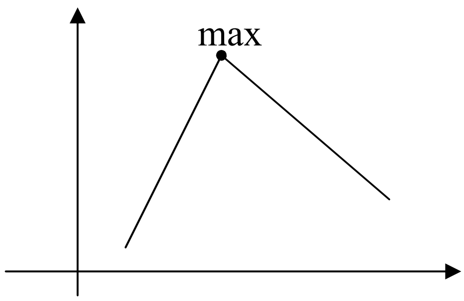
اگر در نقطه ای ، تابع مشتق صفر شود و تغییر علامت دهد، آن نقطه ، نقطه ی بیشینه نـسبی[1] (max) یـا کمینه ی نسبی (min) تابع است.

x		x_0	
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	y_0 min	$\nearrow$

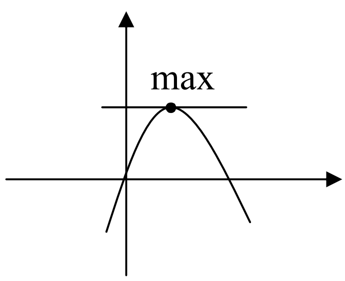
x		x_0	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	y_0 max	$\searrow$

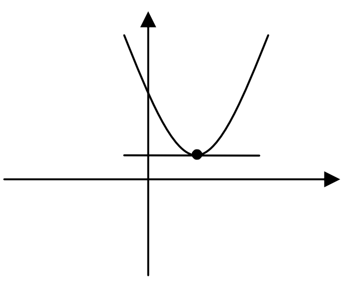


توجه داشته باشید که ممکن است ، نقطه ای بیشنیه یا کمینه باشد ولی تابع در آن نقاط مـشتق پـذیر نباشـد ولی اگر تابع در این نقطه مشتق پذیر باشد، مشتق آن صفر است.



در نقاط بیشینه یا کمینه ی تابع اگر مشتق تابع صفر باشد، شیب خط مماس موازی محور طول های است.





[1] . اطلاق کلمه ی نسبی به این نقاط ، بدین منظور است که عرض این نقاط فقط نسبت به نقاط مجاورشان بیشینه یا کمینه هستند. اگر نقطه ای در تمام نقاط دامنه ی تابع بیشینه یا کمینه باشد،آن را بیشنیه ی مطلق یا کمینه ی مطلق می نامند.

مثال : نقاط بیشینه یا کمینه ی تابع $f(x)=x^{۲}+۴x$ را تعیین کنید.

حل :

$$f'(x)=۲x+۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x+۴=۰ \rightarrow x=-۲$$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۴ min	$\nearrow$	$+\infty$

مثال : نقاط بیشینه یا کمینه ی تابع $f(x)=-x^{۲}+۲x$ را تعیین کنید.

حل :

$$f'(x)=-۲x+۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۲x+۲=۰ \rightarrow x=۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱ max	$\searrow$	$-\infty$

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=x^{۳}-۳x+۱ \rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^{۲}-۳=۰ \rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۳ max	$\searrow$	-۱ min	$\nearrow$	$+\infty$

رسم نمودار توابع چند جمله ای به کمک مشتق

برای رسم نمودار یک تابع چند جمله ای با استفاده از مشتق، به ترتیب زیر عمل کنید.

۱ : دامنه ی تابع را تعیین می کنید.

۲ : از تابع مشتق گرفته و ریشه های آن را در صورت وجود به دست می آورید.

۳ : جدول تغییرات را رسم می کنید.

۴ : به کمک جدول تغییرات ، نمودار تابع را روی صفحه ی محور های مختصات رسم کنید.

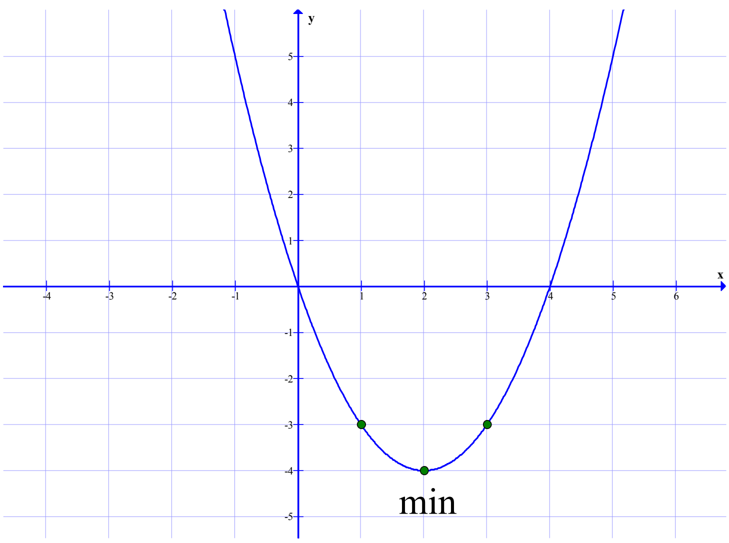
اگر لازم باشد، جهت دقت بیشتر در نقطه یابی و ترسیم نمودار، می توانید از نقاط دلخواه دیگری با توجه به معادله ی تابع انتخاب کنید. این نقاط را نقاط کمکی می نامند.

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x)=۲x-۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x-۴=۰ \to x=۲$$

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'			$-$		0			$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۳	$\searrow$	-۴ min	$\nearrow$	-۳	$\nearrow$	$+\infty$

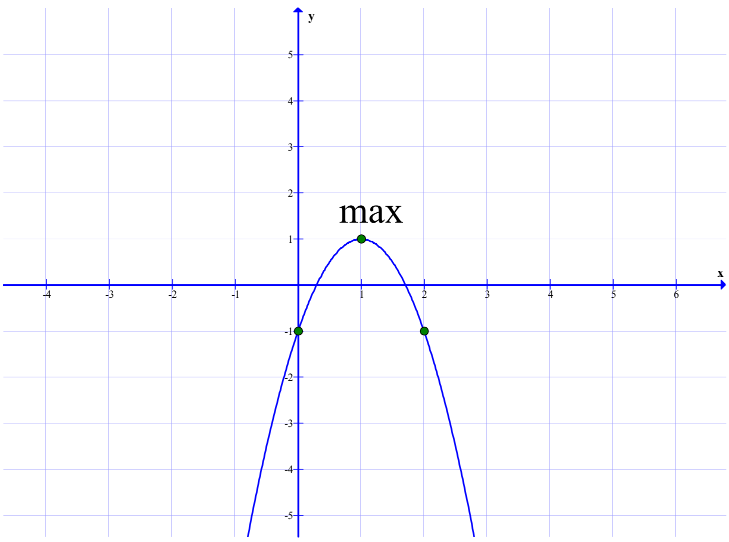


مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = -۲x^{۲} + ۴x - ۱$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x) = -۴x + ۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۴x + ۴ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−			۰			+	
y	$-\infty$	↗	−۱	↗	۱ max	↘	−۱	↘	$-\infty$

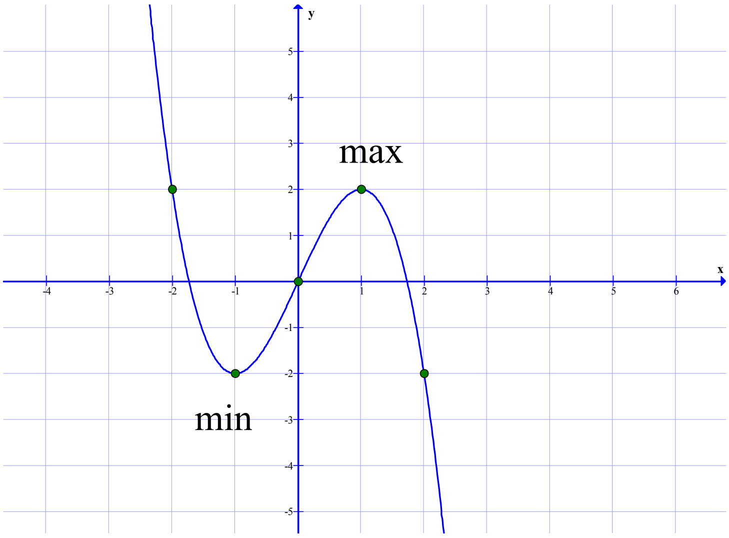


مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = -x^{۳} + ۳x$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x) = -۳x^{۲} + ۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^{۲} + ۳ = ۰ \rightarrow -۳x^{۲} = ۱ \rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		−۲		−۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−			۰		+		۰				−
y	$-\infty$	↘	۲	↘	−۲ min	↗	۰	↗	۲ max	↘	−۲	↘	$-\infty$



تمرین برای حل : جدول تغییرات و نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۳۳) $f(x)=-۳x^۲+۶x+۱$

۳۴) $f(x)=۳x^۲-۳x$

۳۵) $f(x)=-x^۳+۳$

۳۶) $y=x^۴-۴x^۳$

۳۷) $f(x)=x^۴-۸x^۲+۷$

***

مشتق تابع ضمنی

هر معادله به شکل $f(x,y)=۰$ ممکن است خود تابع نباشد ولی می توان از آن یک یا دو تـابع اسـتخراج نمود. مانند معادله ی $x^۲+y^۲=۱$ که تابع نیست ولی توابع زیر از آن استخراج می شوند.

$$y=\sqrt{۱-x^۲} \quad \text{و} \quad y=-\sqrt{۱-x^۲}$$

به همین دلیل است که چنین معادلاتی به توابع ضمنی موسوم هستند.[۲]

[2] . برای تشخیص اینکه تابع داده شده ، ضمنی است یا خیر . می توان از الگوی زیر استفاده کنید.

هر تابع صورت $y=f(x)$ را تابع صریح می نامند. مانند: $f(x)=۳x^۲+\sin x+۱$

هر تابع به صورت $f(x,y)=۰$ را تابع ضمنی می نامند. مانند تابع $x^۳+۲xy+۱=\sin x+\cos y$

در تابع صریح y تنها یک طرف تساوی و بقیه ی جملات بدون y در طرف دیگر می باشند. اگر چنـین نباشـد، تـابع ضـمنی است.

منظور از مشتق تابع ضمنی مشتق توابع بدست آمده از آن است. برای محاسبه ی مشتق هر تابع ضمنی، پس از منتقل کردن تمام جملات به یک طرف معادله، از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

مشتق نسبت به x (y عدد فرض می شود.)

مشتق نسبت به y (x عدد فرض می شود.)

مثال : در تابع زیر حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

$$x^{۲} + ۳xy + y^{۳} - x + ۲ = ۰$$

حل :

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{۲x + ۳y - ۱}{۳x + ۳y^{۲}}$$

مثال : در تابع زیر حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

$$x^{۳} + ۳x^{۴}y^{۵} - ۲xy + ۱ = \sin x + \cos y$$

حل :

$$x^{۳} + ۳x^{۴}y^{۵} - ۲xy + ۱ - \sin x - \cos y = ۰$$

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{۳x^{۲} + ۱۲x^{۳}y^{۵} - ۲y - \cos x}{۱۵x^{۴}y^{۴} - ۲x + \sin y}$$

مثال : شیب خط مماس بر منحنی نمودار تـابع $e^{x} + e^{y} - x^{۲} - y^{۲} - ۲ = ۰$ در نقطـه ی $(۰,۰)$ را بدست آورید.

حل :

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{e^x - ۲x}{e^y - ۲y}$$

$$m = -\frac{e^{(۰)} - ۲(۰)}{e^{(۰)} - ۲(۰)} = -۱$$ شیب خط مماس

تمرین برای حل : در هر یک از توابع زیر $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

۳۸) $x^۲ + ۳xy + y^۳ - x + ۲ = ۰$

۳۹) $۳x^۲ + ۵y^۳ - ۲x + ۱ = ۷xy$

۴۰) $۲x^۳y^۵ + ۴x - ۶y = xy - ۱$

۴۱) $x^۳ + y^۳ - ۴xy = ۰$

۴۲) $x^۲ + y^۴ = xy^۳ + ۸ + e^{xy}$

۴۳) $\cos x + x^۳y^۵ - ۲y^۲ = ۰$

۴۴) $\sin x + \cos y = x + y$

۴۵) $y = \sin(x + y)$

۴۶) $x\sin y + y\sin x = x + y$

۴۷) $(x + y)^۳ + x^۲y = x^۳$

تمرین ۴۸) مقدار عددی $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه ی $(۱,۰)$ برای تابع $۲x + y^۲ = y + x^۲ + ۱$ محاسبه کنید.

تمرین ۴۹) معادله ی خط مماس بر منحنی $x^۳ + ۴x^۲y - ۳y^۳ = ۰$ را در نقطه‌ی $(-۱,۱)$ بنویسید.

***

مشتق گیری از توابع مرکب (قاعده ی زنجیری)

اگر $y = f(u)$ تابعی برحسب u و $u = g(x)$ تابعی برحسب x باشد، آنگاه $y = f(g(x))$ یک تابع مرکب برحسب xاست. در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$$

در این صورت برای محاسبه ی مشتق تابع y بر حسب x از قاعده ی زنجیری زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

این قاعده را قاعده ی زنجیری می نامند که برای چند تابع نیز قابل تعمیم است.

$$\begin{cases} y=f(u) \\ u=g(t) \\ t=h(x) \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

مثال : با توجه به تابع زیر $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} y=۲u^{۲}-u \\ u=\sin x \end{cases}$$

حل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=(۴u-۱)(\cos x)=(۴\sin x-۱)(\cos x)$$

تمرین برای حل :

تمرین ۵۰) مشتق توابع زیر را بر حسب x بدست آورید.

الف) $\begin{cases} y=e^{۲t} \\ t=\sin^{-۱} x \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y=\sin u \\ u=e^{۲t} \\ t=\sqrt{x} \end{cases}$

طبق قاعده ی زنجیری واضح است که اگر $y=f(u)$ آنگاه $y'=u'.f'(u)$

مثال : به کمک قاعده ی زنجیری مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y=f(\sin x)\rightarrow y'=\cos x.f'(\sin x)$

ب) $y=f(g(x))\rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$

مثال: اگر $f(x)=x^{۲}-۵x$ مشتق تابع $y=f(\cos x)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'(x)=۲x-۵$$
$$y'=-\sin x.f'(\cos x)=-\sin x.(۲\cos x-۵)$$

مثال: اگر $f'(x)=\sqrt{3x+16}$ و $g(x)=x^3-1$ باشد، مشتق تابع $(fog)(x)$ را در $x=1$ بیابید.

حل:

$$g'(x)=3x^2 \to g'(1)=3(1)^2=3$$
$$g(1)=1^3-1=0$$
$$f'(g(1))=f'(0)=\sqrt{3(0)+16}=4$$
$$(fog)'(x)=(f(g(x))'=g'(x).f'(g(x))$$
$$(fog)'(1)=g'(1).f'(g(1))=3\times 4=12$$

تمرین برای حل :

تمرین ۵۱) مشتق تابع $y=\sqrt{x^2\times \sin 3x}$ را به کمک قاعده ی زنجیری بدست آورید.

تمرین ۵۲) مشتق تابع $y=\tan(\sin 2x)$ را در نقطه ی $x=0$ بدست آورید.

***

تابع پارامتری و مشتق آن

هر تابع به شکل زیر، که هر دو متغیر x و y توابعی بر حسب متغیر دیگری مانند t باشند، را تـابع پـارمتری می نامند.

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

تابع زیر یک نمونه از توابع پارامتری است.

$$\begin{cases} x=3t^2+5t+1 \\ y=2t+e^t \end{cases}$$

برای محاسبه ی $\frac{dy}{dx}$ یعنی مشتق تابع برحسب x، از چنین توابعی از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$\frac{dy}{dt}$ ‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐► مشتق y نسبت به t

$\frac{dx}{dt}$ ‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐‐► مشتق x نسبت به t

مثال : مشتق تابع زیر را نسبت به x به دست آورید.

$$\begin{cases} y = t + \sin t \\ x = ۱ + \sqrt{t} \end{cases}$$

حل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۱ + \cos t}{\frac{۱}{۲\sqrt{t}}} = ۲\sqrt{t}(۱ + \cos t)$$

تمرین برای حل :

تمرین۵۳) مشتق توابع زیر را نسبت به x بدست آورید.

الف) $\begin{cases} y = ۳\sin(۲t - ۱) \\ x = e^{۳t+۱} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} y = ۱ + ۳\sin\alpha \\ x = ۳\cos\alpha - ۱ \end{cases}$

تمرین۵۴) در تابع زیر $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه ی $t = -۲$ بدست آورید.

$$\begin{cases} y = ۳t^{۲} - t + ۱ \\ x = t^{۳} + t \end{cases}$$

***

روش هایی برای حل مسائل پارامتری

گاهی معادله ی یک تابع بر حسب یک یا چند پارامتر داده می شود و براساس شرایطی که تعیین می شود، محاسبه ی پارامتر ها ، مد نظر است. نکاتی که در این قسمت ارائه می شوند، می توانندر حل مسائل پارامتری کمک نمایند.

۱) هر نقطه ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله ی منحنی صدق می کند. نقطه ی عادی نقطه ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

مثال : در تابع $y = (m - ۱)b^{۳} + ۲mb - ۱۳$ مقدار m را طوری بیابید که منحنی این تابع از نقطه ی (۲,۳) بگذرد.

حل : نقطه ی داده شده ، یک نقطه‌ی عادی است لذا مختصات آن را در معادله ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,۳)\xrightarrow{y=(b-۱)x^{۳}+۲bx-۱۳}۳=(m-۱)(۲)^{۳}+۲m(۲)-۱۳\rightarrow ۸m-۸+۴m=۱۶$$
$$\rightarrow ۱۲b=۲۴\rightarrow b=۲$$

۲) نقطه ی ماگزیمم یا مینیمم دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه ی اوّل در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه، مقدار مشتق مرتبه ی اوّل، برابر صفر می شود. ($y'=۰$)

مثال : تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری پیدا کنید که نقطه ی $M(۲,-۴)$ یکی از نقاط ماگزیمم یا مینیمم منحنی باشد.

حل : ابتدا مختصات آن را در معادله ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y=x^{۳}+ax^{۲}+b}-۴=(۲)^{۳}+a(۲)^{۲}+b\rightarrow ۴a+b=-۱۲$$

چون این نقطه، ماگزیمم یا مینیمم تابع است. لذا در مشتق مرتبه ی اوّل نیز جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y'=۳x^{۲}+۲ax}۰=۳(۲)^{۲}+۲a(۲)\rightarrow ۱۲+۴a=۰\rightarrow a=-۳$$

در نهایت کمک رابطه ی اوّل ، مقدار b را تعیین می کنیم.

$$a=-۳\xrightarrow{۴a+b=-۱۲}۴(-۳)+b=-۱۲\rightarrow b=۰$$

۳) نقطه ی عطف دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه ی دوّم در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه ی دوّم، برابر صفر می شود. ($y''=۰$)

مثال : تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و $A(۱,۱)$ نقطه ی عطف آن باشد.

حل :

$$(0,0)\xrightarrow{y=x^3+ax^2+bx+c} 0=(0)^3+a(0)^2+b(0)+c \to c=0$$

$$(1,1)\xrightarrow{y=x^3+ax^2+bx+c} 1=(1)^3+a(1)^2+b(1)+c \xrightarrow{c=0} a+b=0$$

$$y=x^3+ax^2+bx+c \to y'=3x^2+2ax+b \to y''=6x+2a$$

$$(1,1)\xrightarrow{y''=6x+2a} 0=6(1)+2a \to a=-3$$

$$a+b=0 \xrightarrow{a=-3} -3+b=0 \to b=3$$

۴) نقطه ی تماس دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه ی اوّل در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه ی اوّل، برابر شیب خط مماس می شود. ($y'=m$)

مثال : تابع $y=ax^3+bx+1$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y=5x-3$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

حل :

$$x=1 \xrightarrow{y=5x-3} y=5(1)-3=2 \to A(1,2) \quad \text{نقطه ی تماس}$$

$$(1,2)\xrightarrow{y=ax^3+bx+1} 2=a(1)^3+b(1)+1 \to a+b=1$$

واضح است که شیب خط مماس برابر ۵ است. اسن مقدار را نیز از مشتق به دست می آوریم.

$$y'=3ax^2+b \xrightarrow{x=1} m=3a(1)^2+b \xrightarrow{m=5} 3a+b=5$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+b=5 \end{cases} \to a=2 \ , \ b=-1$$

تمرین برای حل :

تمرین ۵۵) تابع $y=x^3+ax+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از نقاط $(0,-2)$ و $(1,2)$ بگذرد.

تمرین ۵۶) منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x+m}{x+n}$ محور طول ها را در نقطه ی A و محور عرض هـا را در نقطه ی B قطع می کند.اگر معادله خط AB به صورت $y=x-۱$ باشد. مقدار n و m را بیابید.

تمرین ۵۷) تابع $y=ax^{۳}+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و در نقطه ای به طول یک دارای مینیممی برابر ۲- باشد.

تمرین ۵۸) تابع درجه ی سومی بنویسید که $A(۰,۴)$ نقطه ی ماگزیمم و $B(۲,۰)$ نقطه ی مینیمم آن باشد.

تمرین ۵۹) تابع درجه‌ی سومی بنویسید که $M(۰,۴)$ نقطه‌ی ماگزیمم و $N(۱,۲)$ مرکز تقارن آن باشد.

توجه : در تابع درجه ی سوم مرکز تقارن همان نقطه ی عطف می باشد.

تمرین ۶۰) مقدار k را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی $y=kx^{۲}+۲x+۱$ در نقطه ی $x=۱$ موازی محور طول ها باشد.

***

مشتق مراتب بالاتر

تابع مشتق هر تابعی را مشتق مرتبه ی اوّل می نامند. حال اگر از مشتق تابعی، مشتق دیگـری گرفتـه شـود، مشتق مرتبه ی دوّم بدست می آید و اگر از مشتق مرتبه ی دوّم ، مشتق دیگری بگیـریم، مـشتق مرتبـه ی سوّم حاصل می شود. به همین ترتیب می توان مشتق مراتب بالاتر را تعیین کرد. به جدول زیر توجه کنید.

تابع	$y=f(x)$
مشتق مرتبه ی اوّل	$y'=f'(x)$
مشتق مرتبه ی دوّم	$y''=f''(x)$
مشتق مرتبه ی سوّم	$y'''=f'''(x)$
مشتق مرتبه ی چهارم	$y^{(۴)}=f^{(۴)}(x)$
مشتق مرتبه ی پنجم	$y^{(۵)}=f^{(۵)}(x)$
....	....

مثال : مشتق مرتبه ی سوّم تابع $f(x)=x^{۳}+\sin x$ را بدست آورید.

حل :

تابع	$f(x)=x^{۳}+\sin x$
مشتق مرتبه ی اوّل	$f'(x)=۳x^{۲}+\cos x$
مشتق مرتبه ی دوّم	$f''(x)=۶x-\sin x$
مشتق مرتبه ی سوّم	$f'''(x)=۶-\cos x$

مثال : مشتق مرتبه ی پنجم تابع $f(x)=e^{۲x}+۳\cos x+۱$ را بدست آورید.

تابع	$f(x)=e^{۲x}+۳\cos x+۱$
مشتق مرتبه ی اوّل	$f'(x)=۲e^{۲x}-۳\sin x$
مشتق مرتبه ی دوّم	$f''(x)=۴e^{۲x}-۳\cos x$
مشتق مرتبه ی سوّم	$f'''(x)=۸e^{۲x}+۳\sin x$
مشتق مرتبه ی چهارم	$f^{(۴)}(x)=۱۶e^{۲x}+۳\cos x$
مشتق مرتبه ی پنجم	$f^{(۵)}(x)=۳۲e^{۲x}-۳\sin x$

تمرین برای حل :

تمرین ۶۱) مشتق مرتبه ی دوّم تابع $f(x)=۳x^{۲}+x^{۳}+e^{x}$ را در نقطه ی $x=۰$ بدست آورید.

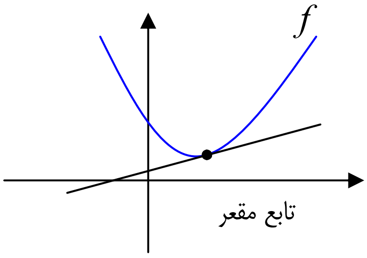
تمرین ۶۲) مشتق مرتبه ی سوّم تابع $f(x)=L_{n}x^{۲}$ را بدست آورید.

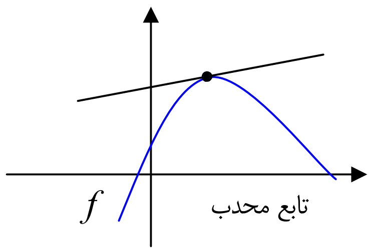
***

جهت تقعر و نقاط عطف تابع

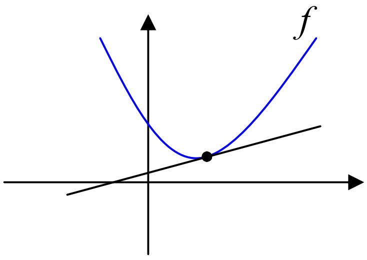
اگر نمودار تابع پیوسته‌ی f طوری باشد که، نمودار تابع بالای خط مماس بر یک نقطه از آن، گوییم تابع f مقعر (کاو) می باشد. مانند تابع $f(x) = x^{۲}$

اگر نمودار تابع پیوسته‌ی f طوری باشد که، نمودار تابع زیر خط مماس بر یک نقطـه از آن، گـوییم تـابع f گوییم تابع f محدب (کوژ) می باشد. مانند تابع $f(x) = -x^{۲}$

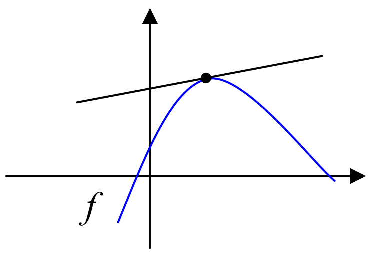




محدب و مقعر بودن نمودار تابع را می توان به کمک مشتق مرتبه ی دوّم نیز تعیین کرد. بـدین صـورت کـه مشتق مرتبه ی دوّم را محاسبه و تعیین علامت می کنیم. اگر مشتق مرتبه ی دوّم تابعی مثبت آن تابع مقعـر و اگر منفی باشد، محدب است.

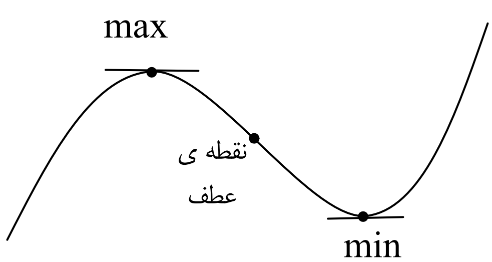


$f''(x) > ۰ \leftrightarrow$ تابع مقعر



$f''(x) < ۰ \leftrightarrow$ تابع محدب

هر نقطه از نمودار تابع که در آن تقعر و تحدب نمودار، تغییر کند، را **نقطه ی عطف** می نامند. به عبارتی دیگر، هر نقطه که در آن مشتق مرتبه ی دوّم صفر شود و تغییر علامت دهد، نقطه ی عطف تابع است.



مثال : نقطه ی عطف تابع $f(x)=x^{۳}-۶x+۲$ را بدست آورید.

حل :

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶ \to f''(x)=۶x \xrightarrow{f''(x)=۰} ۶x=۰ \to x=۰$$

تمرین برای حل :

تمرین۶۳) نقاط عطف تابع $f(x)=x^{۴}-۴x^{۳}+۵x-۱$ را بدست آورید.

تمرین۶۴) نقاط عطف تابع $f(x)=xe^{-x}$ را تعیین کنید.

تمرین۶۵) نقاط عطف تابع $f(x)=e^{x^{۳}}$ را تعیین کنید.

***

حل مسائل بهینه سازی

در صنعت و اقتصاد فهمیدن بیشترین سود، کمترین هزینه ، کمترین سطح ، کمترین فاصله ، کمتـرین زمـان و... بسیار مورد توجه قرار می گیرد. هرگاه به دنبال کمترین یا بیشترین مقدار توابع باشیم ، می توان از مفهوم مشتق تابع استفاده کنیم. برای حل این قبیل مسائل، ابتدا با توجه به صورت مسئله تابعی یک متغیره تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق مرتبه ی اوّل آن را تعیین می کنیم.

مثال : مجموع دو عدد مثبت برابر ۳۸ است. بیشترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را بیابید.

حل :

$$x+y=۳۸ \to y=۳۸-x$$

$$P=xy=x(۳۸-x)=۳۸x-x^{۲}$$

$$P(x)=۳۸x-x^{۲} \to P'(x)=۳۸-۲x \xrightarrow{P'(x)=۰} ۳۸-۲x=۰ \to x=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$

$$Max(P)=۳۸(۱۹)-(۱۹)^{۲}=۳۶۱$$

مثال : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۶۴ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را بیابید.

حل :

$$x.y = ۶۴ \rightarrow y = \frac{۶۴}{x} \rightarrow S = x + y = x + \frac{۶۴}{x}$$

$$S(x) = x + \frac{۶۴}{x} \rightarrow S'(x) = ۱ + \frac{-۶۴}{x^۲} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۱ - \frac{۶۴}{x^۲} = ۰ \rightarrow x^۲ = ۶۴ \rightarrow x = \pm ۸$$

با توجه به صورت مسئله فقط مقدار $x = ۸$ قابل قبول است. پس $y = \frac{۶۴}{۸} = ۸$ لذا :

$$Min(S) = x + y = ۸ + ۸ = ۱۶$$

تمرین برای حل :

تمرین ۶۶) مجموع دو عدد مثبت برابر ۸ است. بزرگترین مقدار ممتن برای حاصلضرب آنتا را پیدا کنید.

تمرین ۶۷) اگر داشته باشیم $۳x + ۴y = ۲۴۰$ ماگزیمم مقدار xy را بیابید.

تمرین ۶۸) حاصل ضرب دو عدد مثبت ۲۴ است، کمترین مجموع این دو عدد را پیدا کنید.

***

منابع :

۱ : مرادی ، تیمور ، ریاضی عمومی (ریاضی ۶) ، انتشارات فرهنگ مردم، اصفهان، (۱۳۸۴)

۲ : فرخو ، لیدا، ریاضیات پایه ، انتشارات پیام نور ،تهران، (۱۳۸۴)