مجید نصرا

ریاضی عمومی (۱)

بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه اول: تابع

دوم و سوم

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه: حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B که با نماد $A\times B$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ی ازواج مرتب (x,y) است که در آن $x\in A$ و $y\in B$.

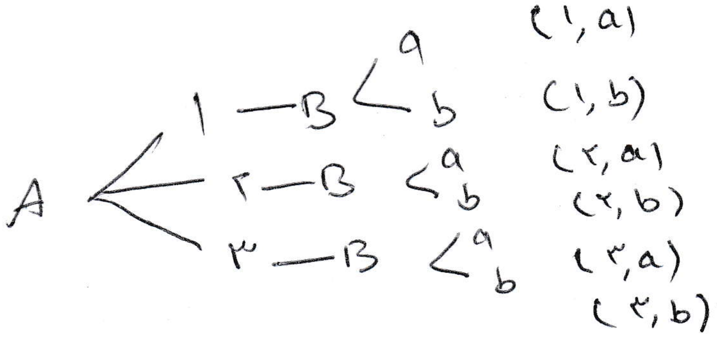
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

مثال:

$$A=\{1,2,3\}$$

$$B=\{a,b\}$$

$A\times B=$



$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

با توجه به دو مجموعه فوق: $A\times B\neq B\times A$

یعنی حاصلضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد.

رابطه: رابطه R از مجموعه A به B، زیرمجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب $A \times B$ است که در قانون (رابطه) R صدق می‌کند

$R : A \longrightarrow B$

$R = \{ (x,y) \in A \times B \mid xRy \}$

مثال: در مجموعه $A \times B$ (یا $B \times A$) صفحه ۱، هر کدام از زیرمجموعه‌های آن، یک رابطه A به B (یا B به A) در نظر می‌گیرد

مثال: دو مجموعه $A = \{10, 20, 21, 22\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. رابطه R از مجموعه A به B را به این صورت تعریف می‌کنیم که R مجموعه همه زوج‌های مرتب (x,y) باشد که رقم یکان x، y است. بنابراین R به صورت زیر خواهد بود.

$R : A \longrightarrow B$

$R = \{ (10,0), (20,0), (21,1), (22,2) \}$

دامنه و برد یک رابطه: فرض کنید $R : A \longrightarrow B$ یک رابطه باشد

همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب R را دامنه R گویند.

" " دوم " " " " " " برد " " " .

R دامنه $= D_R = \{ x \in A \mid \exists y \in B ,\ xRy \} \subseteq A$

R برد $= Im_R = \{ y \in B \mid \exists x \in A ,\ xRy \} \subseteq B$

مثال: فرض کنید $R : N \longrightarrow N$ یک رابطه باشد که در آن $x = 2y$ است. بنابراین (اولین زوج مرتب (x,y)) دامنه و برد R به صورت زیر محاسبه می‌شود

۳۴

$R = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), \dots\} \subseteq N \times N$

$D_R = \{2, 4, 6, \dots\} \subseteq N$

$Im_R = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \subseteq N$

تابع: فرض f یک رابطه از A به B باشد. گوییم f یک تابع از A به B است اگر هر عنصر از مجموعه A حداکثر با یک عنصر از مجموعه B در رابطه باشد.

به بیان دیگر:

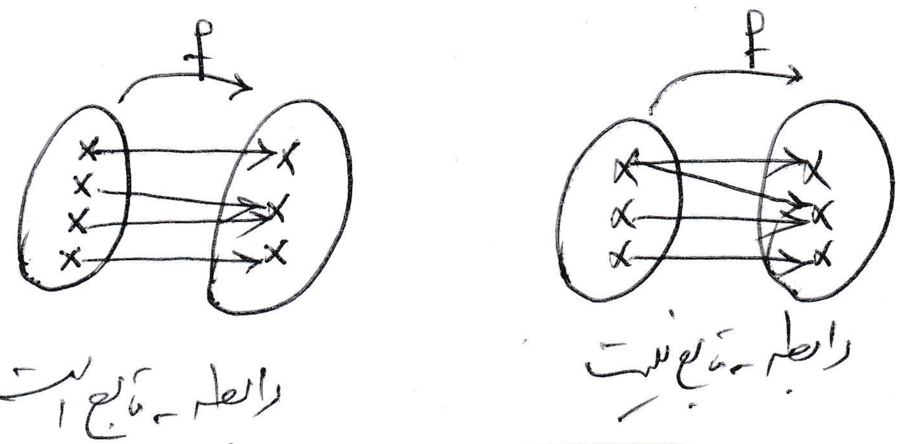
$$\big((x, y_1) \in f \text{ و } (x, y_2) \in f\big) \Longrightarrow y_1 = y_2$$

یا به بیان ساده‌تر: در یک رابطه هر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه اول نابرابر باشند، به آن رابطه یک تابع می‌گویند.

مثال:

$R_1 = \{(1,5), (2,5), (3,6)\}$ رابطه تابع نیست

$R_2 = \{(1,5), (1,6), (3,7)\}$ رابطه تابع است



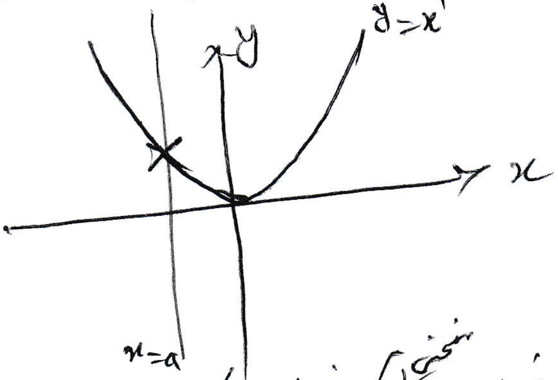
رابطه تابع است　　　　رابطه تابع نیست

ضابطه تابع:

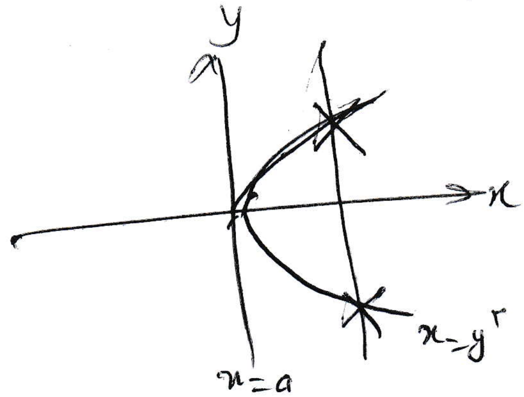
$$\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \xrightarrow{f} y \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

ص ۴

تشخیص تابع از روی نمودار : هرگاه خطی موازی محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



خط $x=a$ منحنی را در یک نقطه قطع کرد . پس تابع است .



خط $x=a$ منحنی را در ۲ نقطه قطع کرد . تابع نمی باشد .

دامنه توابع :

۱- دامنه توابع کثیرالجمله (چندجمله ای) $\mathbb{R}$ می باشد (اعداد حقیقی)

$$f(x) = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

دامنه $D_f = \mathbb{R}$

۲- الف- دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج :

$$f(x) = \sqrt[2k]{g(x)}$$

دامنه $D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$

ب- دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد :

$$f(x) = \sqrt[2k-1]{g(x)}$$

دامنه $D_f = D_g$

یعنی دامنه تابع f همان دامنه تابع زیر رادیکال g می باشد

۳- دامنه توابع کسری گویا

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$ (p و q چند جمله ای هستند)

دامنه $D_f = R - \{x \mid q(x)=0\}$

مثال: دامنه توابع زیر را محاسبه نمایید:

الف) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

حل) : چون فرجه رادیکال زوج است پس:

$$x^2+2x+3 \geq 0$$

پس ابتدا حل نامعادله از درجه ۲:

$$x^2+2x+3=0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 4-12 = -10 < 0$$

ریشه حقیقی ندارد

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$x^2+2x+3 \geq 0$	$+$

پس

$$D_f = R$$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

حل) :

$$x^2-x-2>0$$

$$x^2-x-2=0 \longrightarrow x=2, \quad x=-1$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x^2-x-2>0$	$+$ ق	0	$-$	0	$+$ ق

$$D_f=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

۱۴ ج) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-|x|}$

حل) $1-|x|=0 \longrightarrow x=\pm 1$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$

حل) $9-x^2\geq 0 \Longrightarrow x^2\leq 9 \Longrightarrow -3\leq x\leq 3$

مخرج نباید صفر شود

$x+2=0 \longrightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-3		-2		3	$+\infty$
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$	$+$ ج	$\bullet$	$-$	∞	$+$ ج	$\bullet$	$-$

$D_f=(-\infty,-3]\cup(-2,3]$

ه) $f(x)=\sqrt{x-|x|}$

حل) $x-|x|\geq 0 \longrightarrow x\geq |x|$

به ازای $x\geq 0$ عبارت $|x|\geq x$ صحیح می باشد در نتیجه:

$D_f=[0,+\infty)$

اعمال روی توابع: فرض کنید f و g دو تابع باشند:

الف) جمع دو تابع:

$$(f+g)_{(x)}=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

ب) تفریق دو تابع:

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

ج) ضرب دو تابع

$$(f\cdot g)_{(x)}=f(x)\cdot g(x)$$

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$$

د) تقسیم دو تابع

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

صـ

مثال: برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، $g(x)=x+4$ ، $f\pm g$ ، $f\cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

حل: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

$$x^2-4\geq 0 \longrightarrow x^2\geq 4 \longrightarrow |x|\geq 2 \Rightarrow x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2$$

$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$g(x)=x+4$$

$$D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)_{(x)}=f(x)+g(x)=\sqrt{x^2-4}+x+4$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$(f-g)=\sqrt{x^2-4}-x-4$$

$$D_{f-g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$(f\cdot g)_{(x)}=(\sqrt{x^2-4})(x+4)$$

$$D_{f\cdot g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+4}$$

$$D_{f/g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)-\{x \mid x+4=0\}$$

$$=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)-\{-4\}$$

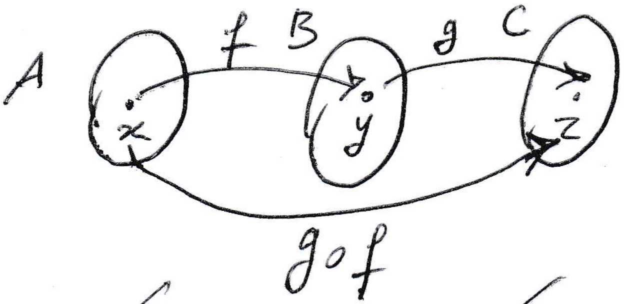
صفحه ۹

ترکیب دو تابع:

فرض کنید $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ و $\begin{cases} g: B \to C \\ z = g(y) \end{cases}$ دو تابع باشند تابع h که به صورت زیر تعریف می‌شود را تابع مرکب f و g گویند.

$$h(x) = (g\circ f)_{(x)} = g(f(x))$$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



به طریق مشابه:

$$(f\circ g)_{(x)} = f(g(x))$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته: تشکیل $(g\circ f)_{(x)}$ وقتی میسر است که $D_g \cap R_f \neq \emptyset$ باشد.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(f\circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$$

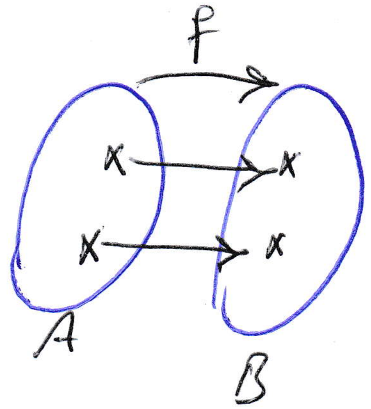
$$= \left\{x \neq 1 \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} \neq 0\right\}$$

$$= \{x \neq 1 \mid x \neq -1\}$$

$$\Rightarrow D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

انواع توابع :

۱- تابع یک به یک : تابع



$$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$$

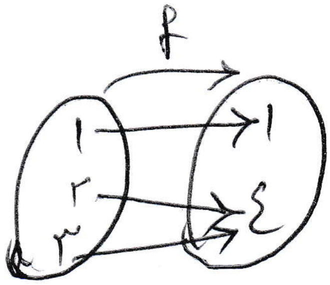
را یک به یک گوییم هرگاه تصاویر دو عضو متمایز متعلق به A به وسیله f، دو عضو متمایز از B باشند. یعنی

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

یا با استفاده از عکس نقیض منطقی می‌توان نتیجه گرفت :

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

مثال: تابع $f = \{(۱,۱), (۲,٤), (۳,٤)\}$ یک به یک نمی‌باشد

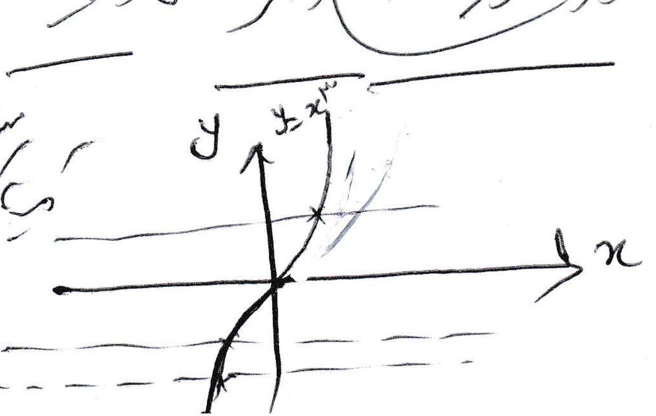


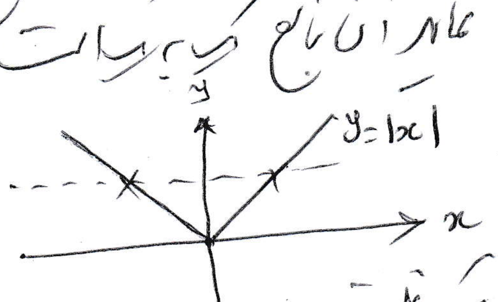
حل) تابع یک به یک نمی‌باشد چون

$$f(۲) = f(۳) = ٤ \Longrightarrow ۲ \neq ۳$$

نکته: اگر نمودار تابع f را داشته باشیم و هر خط موازی محور x ها حداکثر منحنی را در یک نقطه قطع نماید آن تابع یک به یک است

یک به یک است





یک به یک نیست

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$ تابعی یک به یک است زیرا:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{2x_1+1}=\sqrt[3]{2x_2+1} \Rightarrow$

$2x_1+1=2x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=-2x^2+3$ تابعی یک به یک نیست زیرا:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -2x_1^2+3=-2x_2^2+3 \Rightarrow$

$-2x_1^2=-2x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$

۲- تابع معکوس: هرگاه در تابع f جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم (در ازواج مرتب) رابطه جدیدی حاصل می‌شود که آن را معکوس رابطه قبلی می‌نامند و با f^{-1} نمایش می‌دهند.

لازم به یادآوری است که اگر f^{-1} تابع باشد آنگاه آن را تابع معکوس f می‌نامند.

نکته: معکوس هر تابعی ممکن است تابع نباشد.

مثال: تابع معکوس f عبارت است از: $f=\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$

$f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3)\}$ که این رابطه جدید تابع نیست.

روش ضابطه تابع معکوس: الف- ابتدا x را برحسب y حساب می‌کنیم.

ب- در رابطه جدید جای x و y را عوض می‌کنیم.

ج- برای y جدید نام $f^{-1}(x)$ اختیار می‌کنیم.

نکته: شرط معکوس پذیری تابع f یک به یک بودن آن است.

مثال: معکوس تابع $f(x)=2x^3+1$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: R \longrightarrow R \\ f(x)=2x^3+1 \end{cases}$$

حل) اول می‌بینیم یک به یک بودن آن را بررسی می‌کنیم:

$\forall x_1, x_2 \in R$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3+1=2x_2^3+1 \Rightarrow x_1^3=x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$ تابع یک به یک است

حل ضابطه معکوس f:

$$y=2x^3+1 \Rightarrow 2x^3=y-1 \Rightarrow x^3=\frac{y-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

۳ـ تابع زوج و فرد:

تعریف: مجموعه A را متقارن گوییم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $-x \in A$.

مثال: مجموعه $A=[-2,2]$ متقارن است.

مجموعه $B=(-2,3]$ متقارن نیست.

تابع زوج: تابع $f(x)$ را زوج گوییم هرگاه:

الف) دامنه f متقارن باشد $\quad$ الف) $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ب) به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $\quad$ ب) $f(-x)=f(x)$

تابع فرد: تابع $f(x)$ را فرد گوییم هرگاه:

الف) دامنه f متقارن باشد

ب) $f(-x)=-f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

مثال: $f(x)=x^2$ ؟

حل) الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

ب) $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f زوج است

مثال: $f(x)=\cos x$ ؟

حل) الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

ب) $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

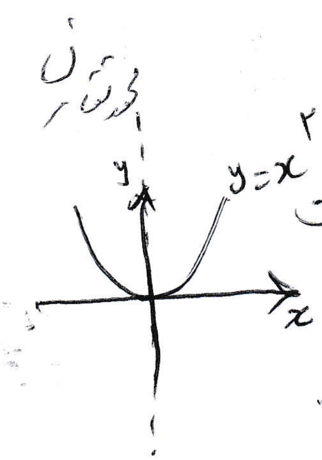
f زوج است

مثال: $f(x)=\sin x$

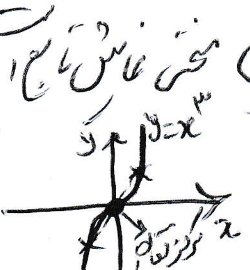
الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

ب) $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f فرد است



نکته: الف) اگر $y=f(x)$ تابعی زوج باشد محور y ها محور تقارن منحنی نمایش تابع است



ب) اگر $y=f(x)$ تابعی فرد باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش تابع است

۴_ تابع صعودی و تابع نزولی :

الف) تابع صعودی: تابع f را در بازه $[a,b]$ صعودی گوییم اگر :

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad ; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز افزایش می‌یابد

ب) تابع نزولی: تابع f را در بازه $[a,b]$ نزولی گوییم اگر :

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad ; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز کاهش می‌یابد

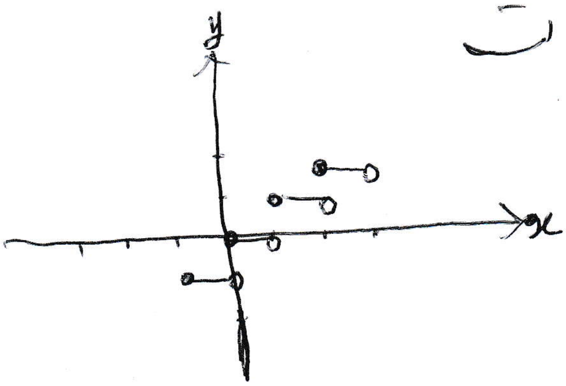
نکته : ۱) اگر داشته باشیم $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تابع را اکیداً صعودی گوییم

۲) " " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ " " " نزولی گوییم .

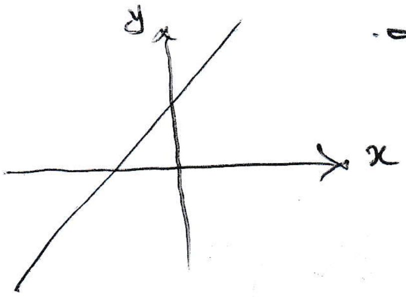
نکته : _ اگر تابع f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ، تابع f را اکیداً یکنوا گوییم

_ تابعی که اکیداً یکنوا باشد ، یک به یک است ولی عکس آن لزوماً درست نیست .

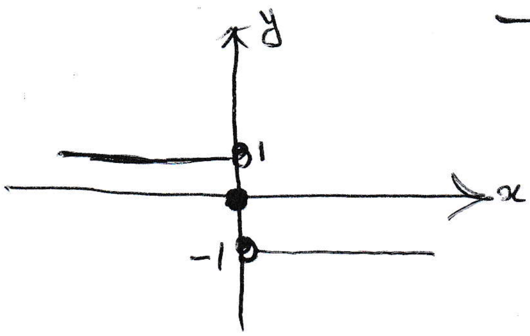
مثال: تابع $f(x)=[x]$ تابعی صعودی است



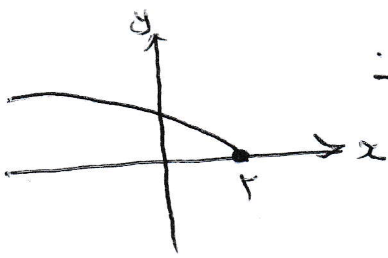
مثال: تابع $f(x)=2x+1$ اکیداً صعودی است.



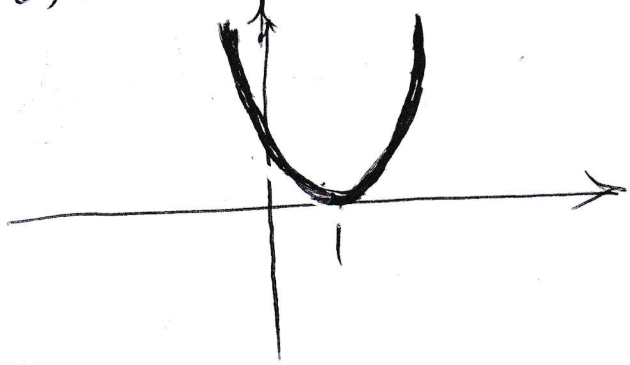
مثال: تابع $f(x)=-sgn(x)$ تابعی نزولی است



مثال: تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ اکیداً نزولی است



مثال: تابع $f(x)=(x-1)^2$ در فاصله $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.



ص ۱۶

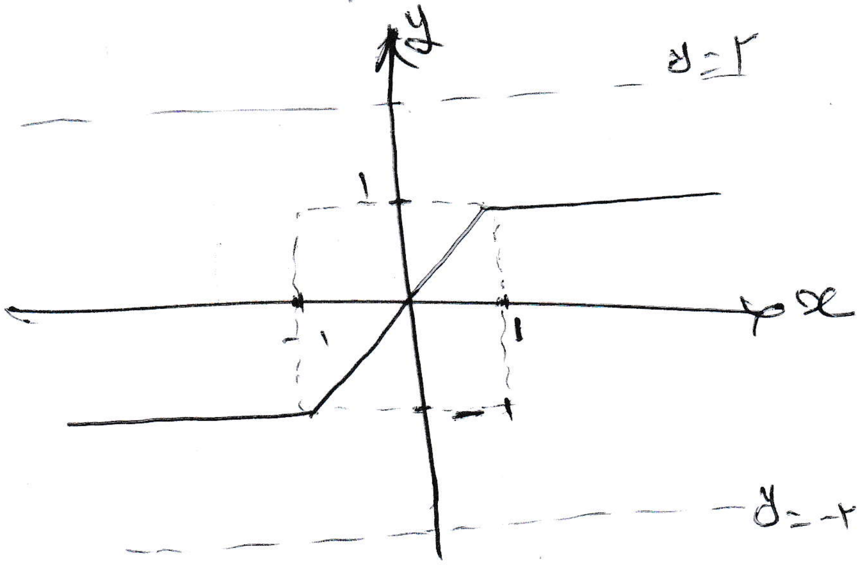
۵ـ تابع کراندار

تابع f را کراندار گوییم هرگاه عدد مثبتی مانند M وجود داشته باشد که به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$|f(x)| \leq M$ یا $-M \leq f(x) \leq M$

به عبارتی دیگر f کراندار است اگر نمودار f بین دو خط $y = M$ و $y = -M$ قرار گرفته باشد. M کران بالا و $-M$ کران پایین گفته می‌شود.

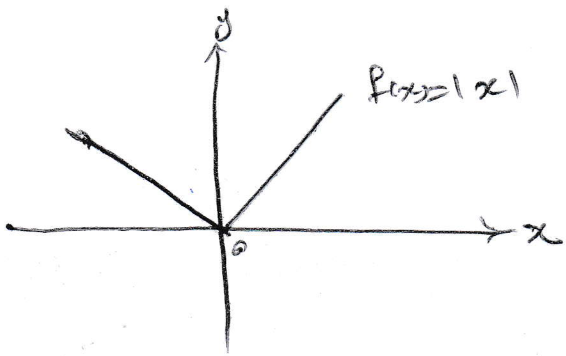
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < -1 \\ x & , -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$ تابعی کراندار است زیرا کافی است M را هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱ در نظر بگیریم. مثلاً $M = 2$



۶- تابع قدر مطلق : $f(x)=|x|$ تابع قدر مطلق است و به صورت زیر تعریف می شود:

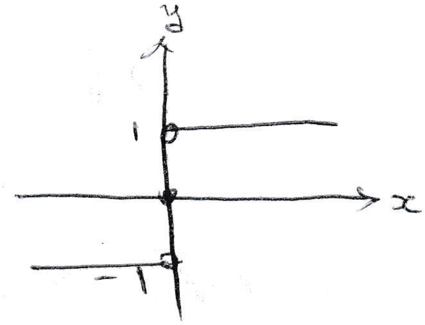
$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\geq 0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$$

تابعی زوج است و نسبت به محور y ها متقارن است



۷- تابع علامت : $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ که

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}$$



۸- تابع جزء صحیح : تابع $f(x)=[x]$ تابع جزء صحیح است که به ازای $n\leq x<n+1$ آنگاه $[x]=n$ است.

$x=n+p \rightarrow 0\leq p<1 \Rightarrow [x]=[n+p]=n$ ⊛ $\Leftrightarrow n\leq x<n+1$

مقدار صحیح

$[۲,۷۵]=[۲+۰/۷۵]=۲$

$[-۱,۲۵]=[-۲+۰/۷۵]=-۲$

مثال: رسم $f(x)=[x]$ در بازه $[-۲,۲)$.

حل: بر اساس نکته ⊛ فوق

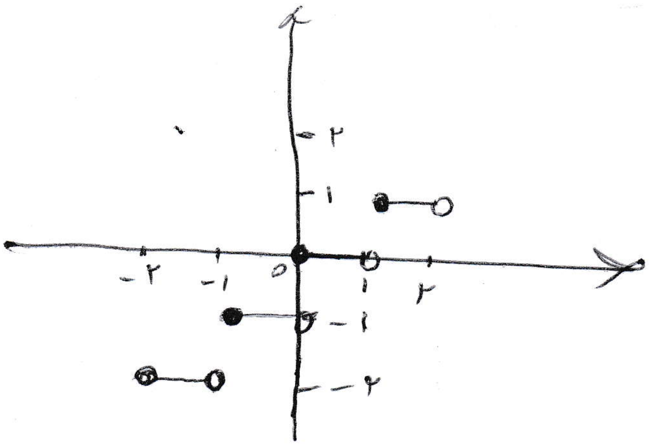
$-۲\leq x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲$

$-۱\leq x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱$

$۰\leq x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=۰$

ص ۱۸

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$



نکته :

۱) $[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & , \ x \notin Z \\ 0 & , \ x \in Z \end{cases}$

۲) $0 \leq x - [x] < 1$

۳) $[x+n] = [x] + n \qquad n \in Z$

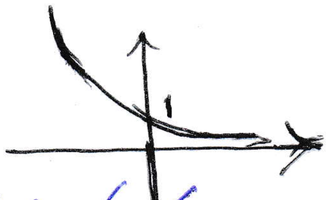
۴) $[x] \leq x < [x] + 1$

۵) $[-x] = \begin{cases} -x & x \in Z \\ -[x] - 1 & x \notin Z \end{cases}$

۹- تابع نمائی : هرگاه $a > 0$ (عدد حقیقی) و $a \neq 1$ باشد تابع $f(x) = a^x$ را یک تابع نمائی گوئیم

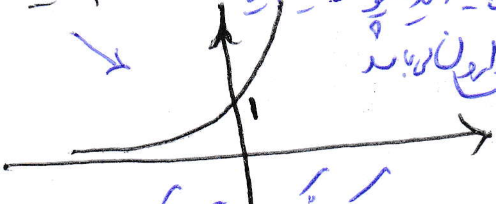
$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (0, +\infty) \end{cases}$

① $a \neq 1 \ , \ 0 < a < 1 \Longrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow$



② $a \neq 1$ و $a > 1 \Longrightarrow f(x) = 2^x$

تابعی صعودی - اکیداً صعودی - یک به یک است یعنی دارای وارون می‌باشد



تابعی نزولی - اکیداً نزولی - یک به یک است یعنی دارای وارون می‌باشد

۱۰- تابع لگاریتمی : با توجه به تعریف وارون تابع ، وارون تابع نمایی ص ۱۸ تابع لگاریتمی می باشد

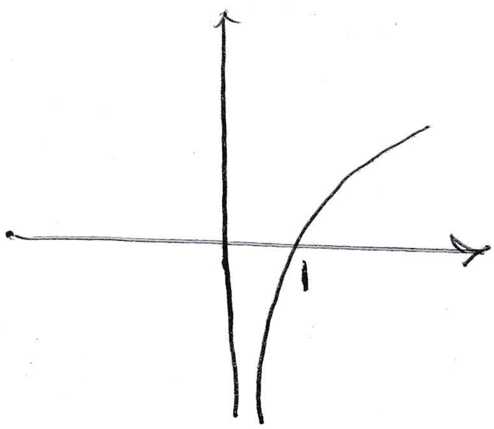
در نتیجه وارون تابع $f(x)=a^x$ تابع $f(x)=\log_a x$ می باشد $(a\neq 1,\ a>0)$

$$\begin{cases} D_f=(0,+\infty) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$

$f(x)=\log_a x$

$a>1$

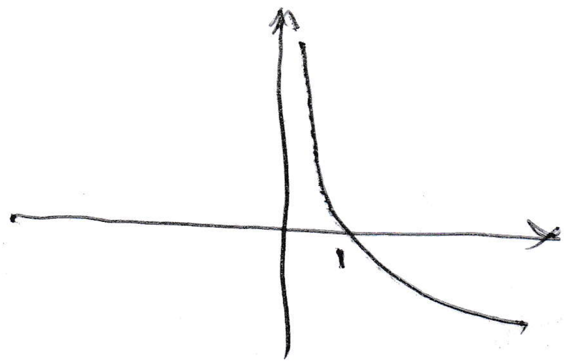
$a\neq 1$



$f(x)=\log_a x$

$0<a<1$

$a\neq 1$



نکته : f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه هم می باشند .

نکته : دامنه تابع $f(x)=\log_{h(x)} g(x)$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$D_f=\{x \mid g(x)>0,\ h(x)>0,\ h(x)\neq 1\}$$

۱۱ـ توابع مثلثاتی و معکوس آن‌ها

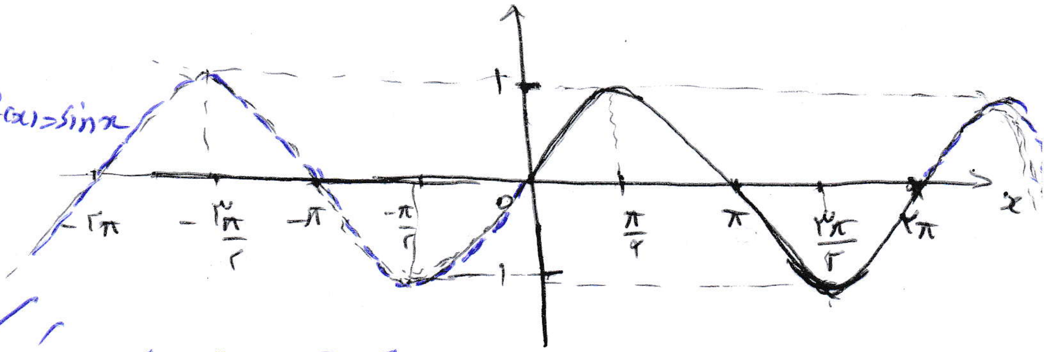
الف) $f(x)=\sin x$

$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-1,1]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	-1	0

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x$ تابع $f(x)=\sin x$ فرد است

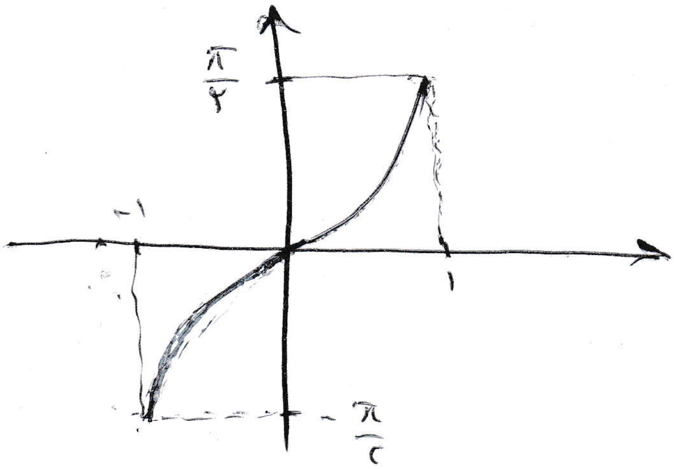


تابع $f(x)=\sin x$ در بازه $D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $R_f=[-1,1]$ یک به یک است و وارون پذیر است.

$f^{-1}(x)=\text{Arc}\sin x$

$D_{f^{-1}}=[-1,1]$

$R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



ب) $f(x)=\cos x$

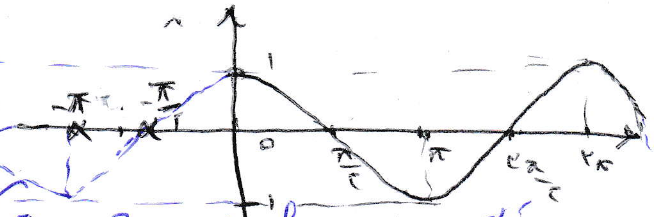
$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-1,1]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0	1

$f(x)=\cos x$ تابعی زوج است

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x$

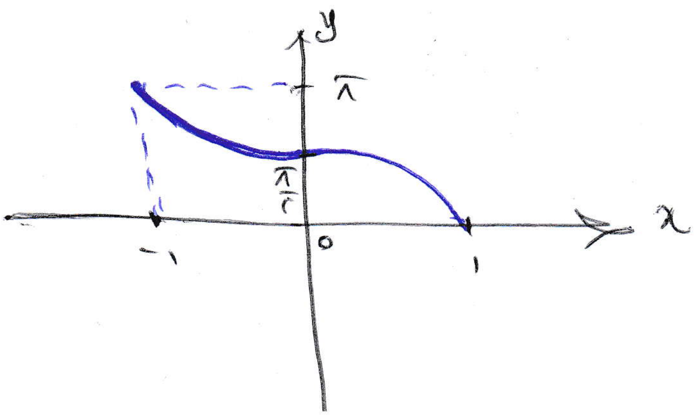


تابع $f(x)=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ یک به یک است لذا معکوس دارد

$f^{-1}(x)=\text{Arc}\cos x$

$D_{f^{-1}}=[-1,1]$

$R_{f^{-1}}=[0,\pi]$



ج) $f(x)=\tan x$

$D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$R_f=\mathbb{R}$

که یک به یک و پوشا است پس دارای وارون است

تابع فرد است

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\operatorname{Arctan} x$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

د) $f(x)=\cot x$

$D_f=[0,\pi]$

$R_f=\mathbb{R}$

که یک به یک و پوشا است

پس دارای وارون است

$\Longrightarrow f^{-1}(x)=\operatorname{Arccot} x$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R_{f^{-1}}=[0,\pi]$

۱۲- توابع هذلولی : هر تابع تعریف شده روی بازه $[-a,a]$ را می‌توانیم به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد روی این بازه تجزیه کنیم.

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{یک تابع زوج است}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{یک تابع فرد است}}$$

اکنون تعریف را برای تابع $f(x)=e^x$ روی $\mathbb{R}$ به کار می‌بریم. بخش زوج تابع e^x را کسینوس هذلولی x می‌نامیم و با chx نشان می‌دهیم و بخش فرد تابع e^x را سینوس هذلولی x می‌نامیم و با shx نشان می‌دهیم:

$$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad , \quad shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

همچنین داریم :

۱) $\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^{x}$

۲) $\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x}$

۳) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

۴) $\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

۵) $\operatorname{coth}x = \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

ادامه مباحث توابع هذلولی جزء الزامات این فصل نمی باشد برای یادگیری بیشتر می توانید به ریاضی عمومی (۱) مراجعه نمایید.

مسایل حل شده :

۱- دامنه توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x) = \sqrt{x - x\sqrt{x}}$

حل) $\begin{cases} x - x\sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{x} \leq x \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow D_f = [0,1]$

ب) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin 2x}$

حل) $1 + \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin 2x \neq -1 \Rightarrow 2x \neq \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{2}, \dots$

$2x \neq 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi - \dfrac{\pi}{4}$

$D_f = \{x \mid x \neq k\pi - \dfrac{\pi}{4}\}$

ج) $f(x)=\log_{x}(x^2-4)$

حل) $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-4>0 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ \text{یا} \\ x<-2 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>2$

$D_f=(2,+\infty)$

د) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

حل) $x-|x|>0 \Rightarrow x>|x| \Rightarrow x\in\phi$

$D_f=\phi$

ه) $f(x)=\log(x+2)+\log(x-2)$

حل) $\begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>2$

$D_f=(2,+\infty)$

۲- زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی نمایید.

الف) $f(x)=\log\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

I) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\geq 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,1]$ متقارن است

II) $f(-x)=\log\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\log\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$

تابع f زوج است.

صفحه ۲۴

ج) $y = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}$

I) $D_f = \mathbb{R}$ متقارن است

II) $f(-x) = \sqrt[3]{-x+2} - \sqrt[3]{2-(-x)} = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$

$= -(\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x})$

$= -f(x)$

f فرد است

۳- یکنوایی توابع زیر را بررسی نمایید

الف) $f(x) = |x| + 2$ $\qquad x \in [0, +\infty)$

ج) $\forall x_1 < x_2 \xrightarrow{x_1, x_2 \in [0, +\infty)} |x_1| < |x_2| \Rightarrow |x_1| + 2 < |x_2| + 2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

در نتیجه f اکیداً صعودی است.

ب) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$\forall x_1 < x_2$

به عنوان مثال اگر $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$\Rightarrow f(x_1) = f(-1) = 1 + 2 + 3 = 6 < f(x_2) = f(2) = 4 - 4 + 3$

پس f اکیداً صعودی نیست

اگر $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$

$\Rightarrow f(x_1) = 2^2 - 4 + 3 = 3 > f(x_2) = f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$

پس f اکیداً نزولی نیست.

در نتیجه f نه صعودی است نه نزولی.

۴- اگر $f\left(\frac{x+2}{1-x}\right)=x^2-x+1$ باشد آنگاه $f(x)$ را به دست آورید.

حل

$$\frac{x+2}{1-x}=t \Rightarrow x+2=t-tx \Rightarrow x+tx=t-2 \Rightarrow x(1+t)=t-2$$

$$\Rightarrow x=\frac{t-2}{1+t}$$

$$f(t)=\left(\frac{t-2}{1+t}\right)^2-\left(\frac{t-2}{1+t}\right)+1=\frac{t^2-4t+4}{(1+t)^2}-\frac{t-2}{1+t}+1$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^2-4t+4-t^2+t+2+t^2+2t+1}{(1+t)^2}=\frac{t^2-t+7}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{t^2-t+7}{(1+t)^2}$$

۵- اگر $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را معین کنید.

حل

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^3-3\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^3}-\frac{3}{t}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1-3t^2}{t^3}$$

در نتیجه

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-3\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

پسرم
برای استفاده بیشتر از
این فصل (تابع) و حل تمرین‌ها
به جزوه کتاب ریاضی عمومی (۱)
تألیف [illegible] ... مراجعه
نمایید